



هم کلاسی
Hamkelasi.ir



مهدی جعفری کیا

ناحیه چهار مشهد مقدس

www.mclass.ir

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فهرست جزوه حسابان سوم ریاضی فیزیک

فصل اول: محاسبات جبرج و معادلات و نامعادلات.....	صفحه ۱
فصل دوم: تابع.....	صفحه ۳۸
فصل سوم: مثلثات.....	صفحه ۸۶
فصل چهارم: حد توابع و پیوستگی.....	صفحه ۱۰۶
فصل پنجم: مشتق توابع.....	صفحه ۱۲۷

((امام علی علیه السلام : عاقل ترین مردم کسی است که در امور زندگیش بهتر

برنامه ریزی کند و در اصلاح آفرتش بیشتر همت نماید.))

فصل اول: محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات

دنباله‌های حسابی (عددی) و هندسی:

الف: دنباله‌های حسابی: شکل کلی این دنباله‌ها به صورت: $a, a + pd, a + 2pd, \dots, a + (n-1)d, \dots$ می‌باشد، و در این نوع دنباله‌ها همواره داریم

$$d = a_n - a_{n-1} \quad \text{قدر نسبت} \quad a_n = a + (n-1)d \quad \text{جمله عمومی}$$

نکته ۱: اگر جمله‌ی a و b دو عدد مقیقی باشند و بخواهیم بین این دو عدد n عدد دیگر بگنجانیم بطوری که جملات حاصل یک دنباله عددی را

$$d = \frac{b-a}{n+1} \quad \text{تشکیل دهند، فوایم داشت:}$$

نکته ۲: اگر a و b و c به ترتیب سه جمله از یک دنباله حسابی باشند، به b واسط عددی می‌گوییم و داریم $b = \frac{a+c}{2}$.

نکته ۳: اگر جمله‌ی a_m و a_n از یک دنباله حسابی را داشته باشیم، فوایم داشت: $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$.

مثال: اگر دنباله عددی $\dots, -7, -4, -1, 2$ را در نظر بگیریم، در مورد جمله اول، قدر نسبت، جمله دهم و جمله سوم آن فوایم داشت:

نکته ۴: برای محاسبه مجموع n جمله اول این نوع دنباله از روابط مقابل محاسبه می‌شود: $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

و اگر جمله آخر که آن را a_n می‌نامیم مشخص باشد، فرمول بالا بصورت زیر نوشته می‌شود: $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

مثال: در دنباله مثال بالا مجموع ۱۰ جمله اول را بیابید.

مثال: در دنباله $\dots, 10, 6, 2$ مجموع چند جمله ۲۰۰ می‌شود؟ مجموع ۱۰ جمله ۲۰۰ می‌شود زیرا:

$\dots, 1, 3, \dots$

مثال: در دنباله حسابی مقابل حداقل چند جمله را جمع کنیم که حاصل از ۴۸ بیشتر شود.

ب: دنباله‌های هندسی: شکل کلی این دنباله‌ها به صورت: $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ می‌باشد، و در این نوع دنباله‌ها همواره داریم:

جمله عمومی: $a_n = aq^{n-1}$ قدر نسبت: $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

نکته ۱: اگر جمله a و b دو عدد حقیقی باشند و بخواهیم بین این دو عدد n عدد دیگر بگنجانیم بطوری که جملات حاصل یک دنباله هندسی را تشکیل دهند، خواهیم داشت: $q^{n+1} = \frac{b}{a}$.

نکته ۲: اگر a و b و c به ترتیب سه جمله از یک دنباله هندسی باشند، به b واسط هندسی می‌گوییم و داریم $b^2 = ac$.

نکته ۳: اگر جمله a_n و a_m از یک دنباله هندسی را داشته باشیم، خواهیم داشت: $q = \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}}$.

نکته ۴: برای محاسبه مجموع n جمله اول این نوع دنباله از روابط زیر مناسبه می‌شود: $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$.

مثال: اگر دنباله عددی $\dots, 28, 14, 7$ را در نظر بگیریم، در مورد جمله اول، قدر نسبت، جمله پنجم و جمله دوم آن خواهیم داشت:

مثال: در دنباله مثال بالا مجموع ۹ جمله اول را بیابید.

مثال: مجموع ۱۰ جمله اول از دنباله $\dots, \frac{p}{9}, \frac{p}{3}, p$ را بیابید.

مثال: مجموع چند جمله از دنباله $\dots, -8, -4, -2$ برابر 682 می‌شود؟

$S = \frac{a}{1-q}$

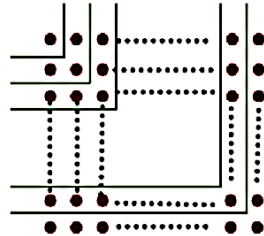
تذکره: در حالتی که $|q| < 1$ باشد، مجموع کل جملات از رابطه مقابل مناسبه می‌شود:

مثال: توپی را از زمین به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر حداکثر ارتفاع توپ 12 و پس از هر بار برخورد توپ با زمین $\frac{1}{3}$ مرمه قبل توپ بالا بیاید، حداکثر مسیری که توپ می‌پیماید را بیابید.

((امام مسن مجتبی(علیه السلام): همانا نیک‌ترین نیکویی، فوی نیکوست.))

تمرینات کتاب

۱. در دنباله مسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله از جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

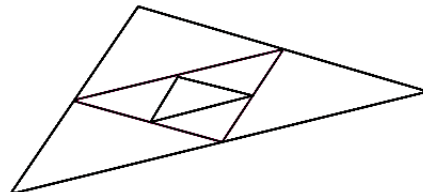


۲. به کمک شکل نتیمه بگیریید $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

۳. علی می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۹٪ پول واریزی در روز قبل را در صندوق قرار دهد. پس از ۵۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ‌گاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۴. برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

۵. یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیریید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به‌طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلث‌های به‌دست آمده (با احتساب مثلث اولیه) چقدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟

(امام حسن مجتبی(علیه السلام): با مردم چنان رفتار و معاشرت کن که مایلی با تو رفتار و معاشرت نمایند))

چند مثال دیگر از دنباله‌ها:

۱. برای هر دنباله زیر سوال مورد نظر را پاسخ دهید.

🍏 $1, 11, 21, \dots, S_n = ?$

🍏 $1, 5, 9, \dots, S_n \geq 120 \Rightarrow n = ?$

🍏 $2, 10, 50, \dots, S_n = 312 \Rightarrow n = ?$

۲. توپی را از زمین به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر حداکثر ارتفاع توپ ۱۰ و پس از هر بار برخورد با زمین $\frac{1}{4}$ قبل از برخورد با زمین بالا بیاید. مسافت کل طی شده را محاسبه کنید.

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش پذیری:

اگر چند جمله‌ای $P(x)$ را بر $B(x)$ تقسیم کنیم و $Q(x)$ خارج قسمت و $R(x)$ باقیمانده این تقسیم باشند، می‌توانیم بنویسیم:

🍏 $P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$

روش هورنر در انجام تقسیم:

برای یافتن باقیمانده و خارج قسمت حاصل از تقسیم عبارت $ax^m + bx^p + cx + d$ بر $x - n$ از جدول زیر که معروف به روش هورنر است استفاده می‌کنیم (عبارت درجه سوم فقط به عنوان مثال می‌باشد).

$ax^m + bx^p + cx + d$	a	b	c	d
$x - n$	a	$b + an = a_1$	$c + a_1n = a_p$	$d + a_p n = R$

با توجه به این جدول باقیمانده برابر R و خارج قسمت برابر $ax^p + a_1x + a_p$ خواهد بود.

مثال: خارج قسمت و باقیمانده تقسیم‌های زیر را بیابید. $\frac{x^3 + 4x - 1}{x + 4}$, $\frac{3x^3 - 2x + 5}{x - 1}$

نکته (یافتن باقیمانده تقسیم بدون انجام تقسیم): در رابطه $P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ اگر بجای x ریشه $Q(x)$ را قرار دهیم فواید

$$\bullet P(a) = B(a)Q(a) + R(a) \Rightarrow P(a) = B(a)(0) + R(a) = R(a) \Rightarrow P(a) = R(a)$$
 داشت:

مثال: باقیمانده تقسیم $x^3 - 4x + 3$ را بر $x - 7$ بیابید.

مثال: مقدار k را چنان بیابید که باقیمانده تقسیم $x^3 + kx - 1$ بر $x + 2$ برابر 4 باشد.

مثال: اگر باقیمانده تقسیم عبارت $x^3 + kx - 1$ بر $x - 2$ برابر 4 باشد، باقیمانده تقسیم آن را بر $x + 1$ بیابید.

مثال: اگر باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x - 3$ و $x + 4$ به ترتیب برابر 1 و 4 باشد، باقیمانده تقسیم آن را بر $x^2 + x - 12$ بیابید.
جواب: چون مقسوم علیه از درجه 2 می باشد پس درجه باقیمانده حداکثر می تواند از درجه 1 باشد. داریم:

تعرین کتاب

الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید :

- 1- عبارت $2 - 5x + 3x^2$ بر $x - 1$ بخش پذیر است.
 - 2- چند جمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر است.
 - 3- چند جمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است.
 - 4- باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ برابر است با $P(-b)$.
- ب) باقی مانده تقسیم $1 - 2x + 4x^2$ بر $1 - 2x$ را تعیین کنید.

((امام مسین علیه السلام: ایمان بنده مومن کامل نمی شود مگر اینکه در او چهار فصلت باشد:))

چند مثال از باقیمانده چند جمله‌ایها:

۱. باقیمانده تقسیم $P(x) = x^m + 4x - 1$ را بر هر یک از عبارات زیر بیابید.

🍏 $x + 1 = 0 \Rightarrow$

🍏 $2x - 1 = 0 \Rightarrow$

۲. اگر $x^m - mx^p + 2x - n$ بر عبارت $x^p - 7x + 4$ بخش پذیر باشد، m و n را بیابید.

تمیزه چند جمله‌ایها:

از روابط زیر برای تمیزه چند جمله‌ای‌های مشابه می‌توان استفاده نمود.

🍏
$$\begin{cases} a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1); & (n \in \mathbb{N}) \\ a^n - 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - 1); & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

🍏
$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1); \quad (n = 2k - 1, k \in \mathbb{N})$$

اثبات:

🍏 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ نکته: در حالت کلی‌تر داریم:

اثبات:

مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید.

* $x^6 - 1 = (x + 1)$

* $x^6 - 1 = (x - 1)$

* $x^5 - 1 = 2x + 1$

* $\frac{x^6 + 1}{x^5 + 1} =$

* $\frac{x^6 + x}{x^5 + x} =$

* $\frac{x^6 - 4x}{x^5 - 2x + 1} =$

((۱.۱) افلاکوش نیکو باشد، ۲. بفشندده باشد))

بسط دو جمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی (فیام-نیوتن):

برای مناسبه عبارتی که به شکل $(a + b)^n$ باشند از بسط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bullet (a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

نکاتی مربوط به بسط فوق:

۱. درجه‌ی هر جمله برابر n می‌باشد. ۲. برای یافتن مجموع ضرایب کافیست بجای تمام متغیرها عدد یک قرار دهیم.

۳. تعداد جملات بسط برابر $n + 1$ می‌باشد. ۴. جمله $(k + 1)$ ام برابر: $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ می‌باشد.

۵. برای یافتن ضریب هر جمله کافیست از مثلث فیام-پاسکال استفاده کنیم و یا برای جمله اول ضریب یک، و برای سایر جملات بسط از جمله قبل استفاده می‌کنیم، به این ترتیب که توان a را درضریب آن جمله ضرب و بر تعداد جملات ما قبل جمله جاری تقسیم می‌کنیم.

۶. با توجه به نکته چهار برای دانستن شماره جمله جاری کافیست به توان جمله دوم یک واحد بیافزاییم.

مثال: بسط $(a + 2b)^5$ را نوشته، تعداد جملات و مجموع ضرایب را بیابید، سپس بدون استفاده از بسط جمله چهارم را بدست آورید.

=مجموع ضرایب

=تعداد جملات بسط

=جمله چهارم

مثال: در بسط‌های $(2x + 5y)^4$ ، $(x^2 - 3y)^4$ جمله چهارم و ششم را بیابید.

مثال: در بسط $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ جمله مستقل از x را جمله پنجم بسط است.

مثال: در بسط $\left(3x - \frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ جمله مستقل از x را بیابید.

تمرین کتاب

۱. طرف دوم عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$(px + y)^5 =$$

$$(3x + pz)^4 =$$

$$(pa - 1)^6 =$$

۲. $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالت‌های زیر $P(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.

الف) $P(1) = 0, P(2) = 0$ ب) $P(0) = 0, P(1) = 1$ ج) $P(-1) = 2, P(2) = -1$

۳. مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 - mx^2 - x + 4$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد.

۴. در چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ بوده و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

۵. m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $mx^2 + n - 3x^2 - 5x + 6$ بر $x^2 - 5x + 6$ بخش پذیر باشد.

((۳) از گفتن صرف های زیادی فووداری کند، ۴. زیادی مالش را انفاق کند.))

۶. نشان دهید عبارت $x - 2$ یک فاکتور (عامل) $f(x) = x^2 + 2x^2 - 5x - 6$ است. سپس معادله $f(x) = 0$ را حل کنید.

۷. a را چنان بیابید که یک جواب معادله $x^2 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب های دیگر معادله را به دست آورید.

۸. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

ج) $(2x - 3y)^4$

ب) $(1 + \frac{2}{x})^6$

الف) $(1 - x)^4$

۹. عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^4 - x^2 y^2$$

$$B = (a^6 + 1)^2 - (a^6 - 1)^2$$

چند مثال از بسط دو جمله ای:

۱. بسط عبارات زیر را بنویسید.

* $(3x + 1)^5 =$

* $(5x - 7)^6 =$

۲. جمله پنجم از بسط های $\left(x + \frac{4}{x}\right)^{10}$ ، $\left(-5x^p + \frac{1}{x}\right)^{1p}$ مستقل از x است؟

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها

برای یافتن ب.م.م و ک.م.م اعداد و چند جمله‌ای‌ها ابتدا عبارات را تا حد امکان تجزیه کرده سپس فوایم داشت:

حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر = ب.م.م

حاصل ضرب عوامل مشترک با توان بیشتر در حاصل ضرب عوامل غیر مشترک = ک.م.م

مثال: ب.م.م و ک.م.م $(x^p - 4x - 5)$ و $12(x^p - 10x + 25)$ را بیابید.

تعرین کتاب

ب. م. م. اعداد ۷۸ و ۲۳۴ و ۱۵۶ را به دست آورید.

تعرین کتاب

۱- ک.م.م. اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را به دست آورید.

۲- می‌خواهیم سالتی به ابعاد ۴۰ و ۳۶ متر را با فرش‌های مربع شکل هم اندازه که اندازه ضلع آن‌ها بر حسب متر عدد طبیعی باشد ببوشانیم. اندازه ضلع فرش‌ها چه عددهایی می‌تواند باشد؟ ضلع فرش‌ها چقدر باشد تا کمترین تعداد فرش برای پوشاندن سالن مورد نیاز باشد بدون آن که فرش‌ها روی هم بیفتند؟

۳- ب.م.م. و ک.م.م. هر یک از دسته اعداد زیر را تعیین کنید. (حروف نشان دهنده اعداد اول متمایزند و مخالف ۲، ۳ و ۵ هستند.)

الف) $32a^2$ ، $16ab^2$ ، $8a^2b^2$ ب) $6x^2y$ ، $8xyz$ ، $10x^2y^2z$

تمرین کتاب

۱- سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می‌شوند. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟

۲- در دنباله‌های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۱, ۵, ۹, ...

۴, ۷, ۱۰, ...

۳- می‌خواهیم ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی کنیم، حداقل تعداد شیشه‌ها کدام است؟ (گنجایش شیشه‌ها را بر حسب لیتر عدد طبیعی فرض کنید.)

معادلات:الف) معادلات شامل عبارات گویا:

برای حل این نوع معادلات ابتدا طرفین معادله را در مخرج مشترک معادله (ک.م.م) ضرب می‌کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود، سپس جواب معادله غیر کسری بومود آمده را می‌یابیم. جواب معادله بدست آمده در صورتی که ریشه مخرج نباشد قابل قبول است.

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-4} = \frac{1}{x}$$

مثال: معادله مقابل را حل کنید.

تمرین کتاب

۱- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{t-1}{t+4} - \frac{2}{t-4} = \frac{7}{6}$$

$$2 + \frac{5}{3k-1} = \frac{-2}{(3k-1)^2}$$

۲. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} \div \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 2x^2}$

ج) $\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{2a}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a + 1}$

ب) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 10x + 21}$

د) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{x^2 + 2x - 3}$

تمرین کتاب

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{t-1}{t+4} - \frac{2}{t-4} = \frac{7}{6}$

ج) $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$

ب) $\frac{3}{2x} = \frac{x+2}{x^2 - 3x}$

تمرین کتاب

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{۶}{p} = ۲ + \frac{p}{p+۱}$$

$$۲) \frac{k}{۲-k} + \frac{۲}{k} = ۵$$

$$۳) ۲ + \frac{۵}{۳k-۱} = \frac{-۲}{(۳k-۱)^۲}$$

$$۴) \frac{۳y+۵}{y^۲+۵y} + \frac{y+۴}{y+۵} = \frac{y+۱}{y}$$

$$۵) \frac{۳}{m+۲} + \frac{۲}{m} = \frac{۴m-۴}{m^۲-۴}$$

$$۶) \frac{۲}{x-۳} - \frac{۳}{x+۳} = \frac{۱۲}{x^۲-۹}$$

ب) معادلات شامل عبارات گنگ:

برای حل این گونه معادلات ابتدا طرفین معادله را به توان ریشه رادیکال می‌رسانیم تا معادله از حالت رادیکالی خارج شود، سپس جواب معادله بدست آمده را می‌یابیم. جواب معادله بدست آمده را در معادله اولیه قرار می‌دهیم تا مورد قبول بودن آن را مورد بررسی قرار دهیم.

$$\sqrt{۲x+۳} = x+۲$$

مثال: معادله مقابل را حل کنید.

مثال: نقطه ای را روی خط $y = ۳x + ۲$ بیابید که فاصله اش از دو نقطه $A(۲,۱)$ و $B(۲,۲)$ یکسان باشد.

مثال: نقطه ای را روی خط $2x - y = 14$ بیابید که فاصله اش از دو نقطه $A(0,1)$ و $B(14,-2)$ یکسان باشد.

تمرین کتاب

(ب) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$



هریک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\sqrt{5q-1} + 3 = 0$

(ج) $\sqrt{3-3p} = 3 + \sqrt{3p+2}$

تمرین کتاب

۱- معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

(الف) $\sqrt{1-x^2} = x$

(ب) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

(ج) $2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x}$

۲- بدون حل معادله $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 = 0$ توضیح دهید چرا مجموعه جواب تهی است؟

چند مثال از حل معادلات:

مجموعه جواب معادلات زیر را بیابید.

$$* \frac{1}{x} - \frac{p}{x+p} = \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$* \frac{p}{x-p} + \frac{p}{x^p - px + p} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow$$

$$* \sqrt{x+1} = p \Rightarrow$$

$$* \sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x} \Rightarrow$$

(ج) معادلات قدر مطلق:

$$* |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تعریف: قدر مطلق به صورت مقابل تعریف می‌شود:

تعریف کتاب

۱- حاصل هریک از عبارات زیر را بدون علامت قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-2 - (-3)|$

ب) $|1 - \sqrt{2}|$

ج) $|\sqrt{3} - \sqrt{5}|$

۲- عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

ب) $\sqrt{x^2 + 2x^2 + 1}$

۳- عبارت «فاصله بین دو عدد x و a کمتر از 0.1 است» را با استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

تذکره: در حالت کلی داریم: $|x| = |a| \Rightarrow x = \pm a$

مثال: معادلات مقابل را به روش جبری حل کنید.

$$|x + 2| = 4$$

$$|x - 1| = 2|x|$$

$$2|x - 1| - 4 = 2$$

$$|9 + |x + 4|| = 1$$

(د) معادلات درجه دوم (سهمی ها):

شکل کلی نمایش معادله سهمی ها به دو صورت زیر است، که در هر مورد داریم:

شکل اول: $y = a(x - x_0)^p + y_0 \Rightarrow S(x_0, y_0), \begin{cases} a > 0 & \text{سهمی رو به بالا} \\ a < 0 & \text{سهمی رو به پایین} \end{cases}$

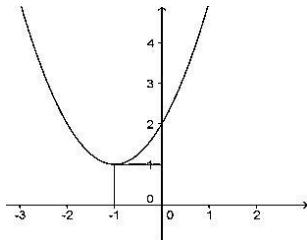
شکل دوم:

$y = ax^p + bx + c = a(x + \frac{b}{pa})^p - \frac{b^p - 4ac}{4a} \Rightarrow S(-\frac{b}{pa}, -\frac{\Delta}{4a}), \begin{cases} a > 0 & \text{سهمی رو به بالا} \\ a < 0 & \text{سهمی رو به پایین} \end{cases}$

مثال: راس و جهت سهمی $y = x^p - 2x, y = 2(x-1)^p - 3$ را بیابید.

نکته: برای بخت روی سهمی ها از روی شکل باید بدانیم:

- نقطه (c, 0) محل تقاطع سهمی با محور y ها را مشخص می کند. راس سهمی نقطه $S(-\frac{b}{pa}, -\frac{\Delta}{4a})$ می باشد.
- اگر $a > 0$ باشد راس سهمی، نقطه ی مینیمم شکل و اگر $a < 0$ راس سهمی، نقطه ماکزیمم شکل می باشد.



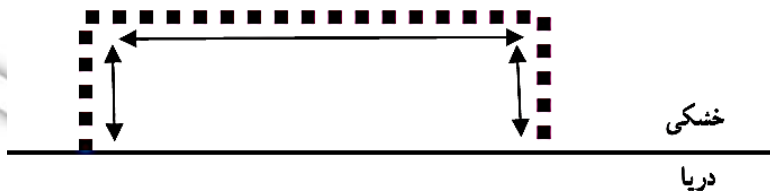
مثال: شکل مقابل مربوط به تابع $y = ax^p + bx + c$ می باشد. مقدار ضرایب را بیابید.

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^p - 4x + 2$ را بیابید.

مثال: محیط یک مستطیل برابر 60 می باشد، بیشترین مساحت آن را بیابید.

مثال: بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد

چقدر است؟



تمرین کتاب

مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$

ب) $f(x) = 4 + 8x - x^2$

نکته: برای یافتن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله درجه دوم (در صورت وجود ریشه ها) خواهیم داشت:

فرض کنید α و β ریشه های معادله اند) $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

نکته: با یک تناسب ساده خواهیم داشت $\alpha^p + \beta^p =$

مثال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارات مقابل را بیابید.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} =$$

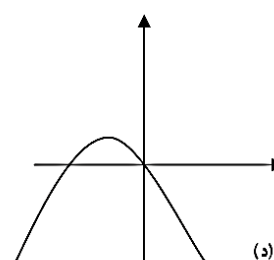
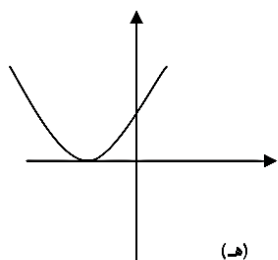
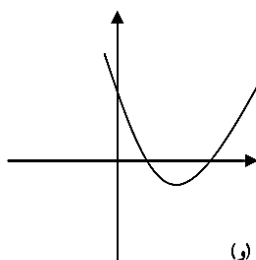
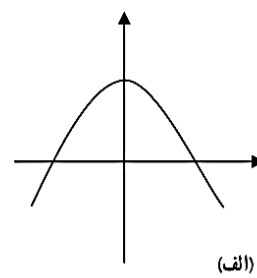
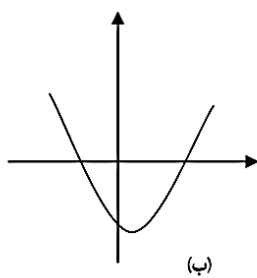
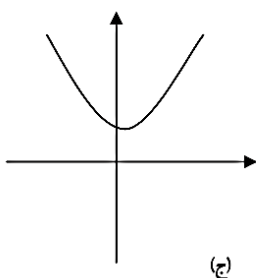
$$\alpha^m \beta + \alpha \beta^m =$$

تذکره: اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله را داشته باشیم، می توانیم صورت معادله را از رابطه زیر بیابیم:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $1 - \sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ باشند.

تمرین کتاب

۱- اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و حاصل ضربشان $-\frac{1}{4}$ باشد آن دو عدد را بیابید.۲- در هر یک از شکل های زیر سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر مورد علامتضرایب a, b, c و تعداد جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.

۳- نشان دهید در بین مستطیل‌هایی که محیط شان مقدار ثابتی است، مربع دارای بیشترین مساحت است.

تمرین کتاب

۱- در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۲- صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = x^3 - 4x \quad (\text{الف})$$

۳- معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{74 - 2x^2}{12} = 10 \quad (\text{ب})$$

$$2x^3 + x^2 + 3x = 0 \quad (\text{الف})$$

۴- معادله درجه دومی بنویسید که :

الف) جواب‌های آن $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ باشد.

ب) جواب‌های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.

۵- مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = 4 + 8x - x^2 \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = 9x^2 + 6x + 3 \quad (\text{الف})$$

۶- اگر α و β جوابهای معادله درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد معادلهای بنویسید که جوابهای آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

۷- بدون حل معادله، و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت جوابهای معادله $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید.

۸- از دبیر ریاضی کلاس حسابان سنش را پرسیدند. پاسخ داد: ۲۱ سال بعد، سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال سن دارد؟

۹- (مسئلهای از کتاب جبر و مقابله خوارزمی) کدام عدد (مثبت) است که چون یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دو حاصل جمع را در هم ضرب کنیم، برابر ۲۰ شود؟

۱۰- در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصلضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می‌کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقی مانده آن ۲۲ می‌شود آن دو عدد را پیدا کنید.

۱۱- معادلات زیر را حل کنید.

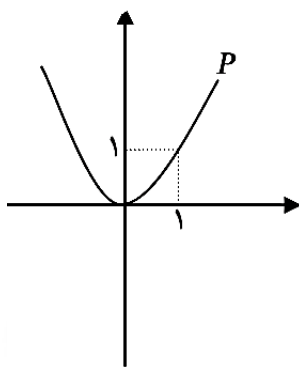
الف) $x^2 - 3x^2 + 2 = 0$

ج) $(4-x^2)^2 - 2(4-x^2) - 15 = 0$

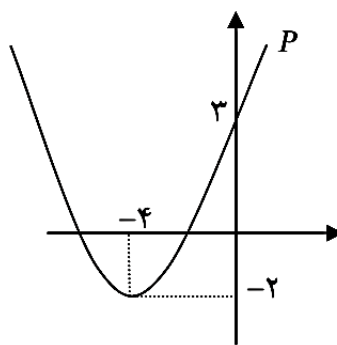
ب) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$

۱۲- کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{2}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید.

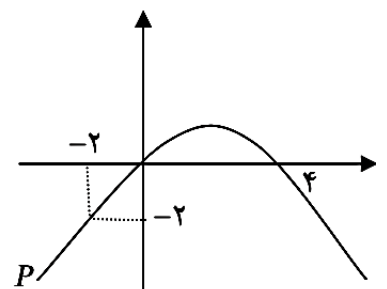
۱۳- در تابع درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ در هر یک از حالت‌های زیر اولاً ضرایب a و b و c ثانیاً علامت $P(x)$ را تعیین کنید.



(ا)



(ب)



(الف)

۱۴- محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

چند مثال از معادلات درجه دوم:

۱. اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\alpha + \beta =$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} =$$

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} =$$

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow$$

۲. اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - mx + 8 = 0$ باشند، مقدار m را چنان بیابید که:

الف) یکی از ریشه ها دو برابر دیگری باشد.

ب) داشته باشیم: $\alpha\beta^2 = 1$

۳. کمترین مقدار عبارت های $x^2 + \frac{4}{x^2}$ و $x^2 + \frac{1}{x^2} + 16x^2 + \frac{5}{x}$ را بیابید.

نامعادلات

الف) نامعادلات درجه دوم و کسری: در سال قبل با این نامعادلات آشنا شدید و آموختید که با استفاده از تعیین علامت می توان این گونه نامعادلات را حل کرد.

((در مدیث قدسی آمده است: "ای آدمیزاد همه چیز را برای تو آفریدم و تو را برای خودم آفریدم"))

((پس بهترین باشیم))

تعریف کتاب

نامعادلات زیر را حل کنید.

$$(1-x)(x+2) > 2x^2 - 1$$

$$1 + \frac{1}{x} < x$$

ب) نامعادلات قدر مطلق:

در ابتدا باید بدانیم در حالت کلی روابط زیر برقرار است:

🍏 $|x| \leq c \Rightarrow -c \leq x \leq c$

🍏 $|x| \geq c \Rightarrow x \geq c \vee x \leq -c$

🍏 $|ab| = |a||b|$

🍏 $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$

🍏 $|a+b| \leq |a| + |b|$

🍏 $|a-b| \leq |a-b|$

اثبات:

$$2|5x+3| - 8 \leq 14 \quad \text{و} \quad |4x+6| \geq 3 \quad \text{و} \quad |2x-1| < 5$$

مثال: نامعادلات مقابل را حل کنید.

رسم توابع قدر مطلق: برای رسم توابع قدر مطلق ابتدا باید از با استفاده از تعریف قدر مطلق و جدول تعیین علامت، عبارت را بدون قدر مطلق

بنویسیم و سپس تابع چند ضابطه‌ای حاصل را رسم کنیم.

$$y = |x| - |2-x| \quad \text{و} \quad y = |x+1| + 2$$

مثال: توابع مقابل را رسم کنید.

x		
x+1		

$$y = |x+1| + 2 \Rightarrow \left\{ \right.$$

نکته: مشابه سال قبل می‌توانستیم با جابجایی نمودار $y = |x|$ ، نمودار تابع بالا را رسم کنیم. (یک واحد به چپ و سه واحد بالا)

x			
x			
۲-x			

$$y = |x| - |2-x| \Rightarrow \left\{ \right.$$

تذکر: برای رسم تابع $|f(x)|$ ابتدا تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت پایین محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. و برای رسم تابع $f(|x|)$ نیز بعد از رسم تابع $f(x)$ قسمتی از شکل که در سمت چپ محور x ها قرار گرفته حذف می‌کنیم، مابقی شکل بعلاوه قرینه آن نسبت به محور x ها جواب مساله می‌باشد (زیرا: اولاً: $|x| \geq 0$ و ثانياً: $f(|x|) = f(-x)$)
مثال: اگر $f(x) = x^p - 1$ باشد تابع $|f(x)|$ را رسم کنید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد، تابع $f(|x|)$ را رسم کنید.

حل هندسی معادلات و نامعادلات:

برای حل معادلات یا نامعادلات بطریق هندسی، ابتدا دو طرف معادله یا نامعادله را بصورت دو تابع: $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در نظر می‌گیریم. محل تقاطع دو تابع جواب معادله است و همچنین با توجه به جهت نامعادلات ممدوده جواب آن‌ها بدست می‌آید.

مثال: معادلات و نامعادلات مقابل را به روش هندسی حل کنید. $\sqrt{x+1} > |x+1|$ و $|x+1| \leq \sqrt{1-x}$ و $x + |x| = 3$

$$x + |x| = 3 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x+1} > |x+1| \Rightarrow$$

$$|x+1| \leq \sqrt{1-x} \Rightarrow$$

$$2x \geq 2^x \Rightarrow$$

امام علی علیه السلام: ((تقوای الهی پیشه کن گرچه اندک، و میان خود و فدای خویش مریم نکه دار ولو کم رنگ))

تمرین کتاب

- ۱- معادله $\sqrt{x+1} - x^2 = 2x+1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید و جواب‌های به دست آمده را مقایسه کنید.
- ۲- تعداد جواب‌های معادله $x - 2\sin x = 0$ را مشخص کنید.
- ۳- از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله $\sqrt{x} = x+1$ جواب ندارد.

تمرین کتاب

- ۱- با روش هندسی به طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کنید و در صورت امکان جواب‌های دقیق را با روش جبری به دست آورید.

$$\text{ب) } \frac{2x-1}{x} = 5 - x$$

$$\text{الف) } \sqrt{x-1} = x-3$$

$$\text{د) } \sqrt{x+2x} = x^2 + 2$$

$$\text{ج) } 2^x = x^2$$

- ۲- به روش نقطه یابی نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید. سپس با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = (x+1)^2$ را رسم کنید و جواب‌های معادله $(x+1)^2 = -3x + 5$ را با روش هندسی به طور تقریبی به دست آورید.

تمرین کتاب

نامعادلات زیر را با روش جبری حل کنید.

$$۱) x^2 - 2x^2 + x \geq 0$$

$$۲) \frac{2x-1}{x} > 1$$

$$۳) \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 2$$

$$۴) |x-2| \leq x$$

نامعادلات زیر را با روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را مشخص کنید.

$$۵) x^2 \leq 2^x$$

$$۶) \sqrt{x-1} < |x-1|$$

$$۷) \frac{1}{x} < \sqrt{x}$$

نامعادلات زیر را با روش هندسی و جبری حل کنید.

$$۸) x+1 < |x|$$

$$۹) |x^2-1| \leq |x+1|$$

$$۱۰) |x| + |x-1| \leq 5$$

تمرین کتاب

۱- هریک از معادلات قدرمطلق زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را مشخص کنید.

الف) $|2x-1|-3=0$ ب) $|y^2-2|=7$ ج) $|2x-3|=3-2x$

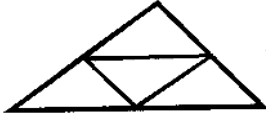
۲- نمودار هریک از روابط زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y=3$ معادله به دست آمده را با روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=|2x-4|$ ب) $y=|x|+|1-x|$ ج) $y=x+\frac{x}{|x|}$



امتحانات نهایی

فرداد ۹۴

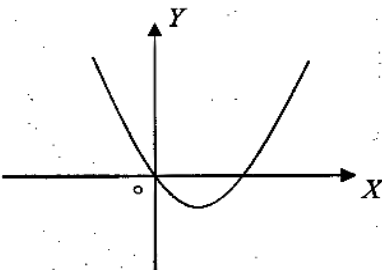
۱	معادله‌ی $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ را حل کنید.	۱
۰/۷۵	جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. الف) باقیمانده‌ی تقسیم $P(x) = 5x^2 + 2x^2 - x + 4$ بر $x+1$ برابر با است. ب) مجموع ضرایب بسط دو جمله‌ای $(3x-1)^6$ برابر است. ج) کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ برابر با است.	۲
۱	یک مثلث با محیط P در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عمل را به طور متوالی انجام دهید. مجموع محیط‌های مثلث‌های به دست آمده چقدر است؟ 	۳
۱/۲۵	ابتدا ضابطه‌ی تابع $y = x-1 + 2-x $ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.	۴

۰/۷۵	گزینه صحیح را انتخاب کنید. i. مجموع $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ برابر با است. ii. باقیمانده‌ی تقسیم $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ بر $2x + 1$ برابر با است. iii. ک.م.م دو عبارت $8b^3$ و $16ab^2$ برابر با است.	۱
	(الف) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (الف) $\frac{7}{8}$ (ب) $\frac{9}{8}$ (الف) $8b^2$ (ب) $16ab^2$	
۱/۲۵	بدون حل معادله و با استفاده از S ، P و Δ در وجود و علامت جواب های معادله $x^2 + x - 5 = 0$ بحث کنید.	۲
۱	معادله رادیکالی $x - 3 = \sqrt{1+x} + 2$ را حل کنید.	۳
۱	به روش هندسی نامعادله $ x + 1 < x$ را حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید.	۴

فرداد ۹۳

۰/۷۵	مقدار m را چنان بیابید که چند جمله ای $P(x) = 2x^2 - mx^2 + 2x + 1$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد.	۱
۱/۲۵	محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.	۲
۱	جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. الف) جواب معادله‌ی $\sqrt{2-x^2} = x$ برابر می باشد. ب) اگر $f(x) = [x+2]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2-\sqrt{2})$ برابر است.	۳
۱/۵	معادله‌ی $x + \frac{x}{ x } = 3$ را به روش هندسی حل کنید.	۴

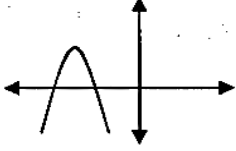
شهریور ۹۳

۱/۲۵	حاصل عبارت $(x-2)^4$ را به دست آورید.	۱
۰/۷۵	<p>شکل زیر نمودار تابع $P(x) = ax^2 + bx + c$ است.</p> <p>الف) علامت a و b را تعیین کنید.</p> <p>ب) مقدار c را بیابید.</p> 	۲
۱	سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می شود. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند، حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن ها دوباره با هم زده شوند؟	۳
۱	معادله $ x-2 =3$ را حل کنید.	۴

دی ۹۳

۰/۷۵	در دنباله‌ی حسابی ... ۳, ۹, ۱۵, ... حداقل چند جمله‌ی آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟	۱
۰/۷۵	جمله‌ی سوم بسط $(x + \frac{2}{x})^5$ را بنویسید.	۲
۱/۵	اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد، معادله‌ی بنویسید که ریشه‌های آن 2α و 2β باشد.	۳
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید. الف) جواب‌های معادله‌ی $ x + 1 = 4$ برابر با و است. ب) مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $ 2x - 1 \leq 7$ بازه‌ی است.	۴

فرداد ۹۲

۱	<p>$p(x)$ یک چند جمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. $p(x)$ را به گونه ای تعیین کنید که در شرایط رو به رو صدق کند.</p> <p>$p(1)=1, p(2)=3$</p>	۱
۱	<p>در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.</p> 	۲
۱/۵	<p>نامعادله $x + x-1 \leq 3$ را با روش هندسی حل کنید.</p>	۳
۱	<p>جاهای خالی را با عبارات ریاضی مناسب پر کنید.</p> <p>الف) مجموعه جواب معادله $x + \sqrt{x} = 6$ برابر است با</p> <p>ب) وارون تابع $y = \frac{2x+1}{x-3}$ برابر است با تابع</p>	۴

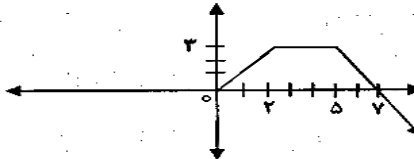
شهریور ۹۲

۱	در دنباله ی حسابی زیر، مجموع بیست جمله ی اول دنباله را بیابید. $-۵, ۰, ۵, \dots$	۱
۱/۲۵	معادله ی $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$ را حل کنید.	۲
۰/۵	جمله ی سوم از بسط $(2x - 1)^7$ برابر است با	۳
۱/۲۵	معادله ی $\sqrt{x+1} = x-1$ را به روش هندسی حل کنید و جواب آن را مشخص کنید.	۴

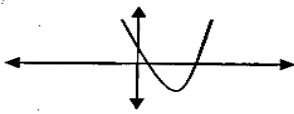
دی ۹۲

۰/۷۵	اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 2x^2 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ را بیابید.	۱
۱/۲۵	در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.	۲
۱/۲۵	معادله‌ی $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی حل کرده و جواب آن را در صورت وجود به دست آورید.	۳
۰/۷۵	نامعادله‌ی قدر مطلق $ 2x - 1 < 1$ را حل کنید.	۴

فرداد ۹۱

۰/۷۵	۱	۱۴۴ لیتر آب میوه، ۴۵ لیتر شیر و ۶۳ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند. حد اقل تعداد شیشه ها را بیابید؟ (گنجایش شیشه ها را بر حسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید).
۰/۷۵	۲	در دنباله ی هندسی نامتناهی زیر، مجموع تمام جملات را بیابید. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$
۱	۳	معادله ی $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را با روش هندسی حل کنید.
۲/۲۵	۴	<p>جاهای خالی را با عبارات ریاضی مناسب پر کنید:</p> <p>الف) مجموعه ی جواب معادله ی $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-1} = 5$ برابر است با</p> <p>ب) اگر $x \leq 1$ باشد، ضابطه ی تابع $y = x-3 + x-1$ بدون استفاده از قدر مطلق برابر است با</p> <p>ج) تابع زیر در بازه ی صعودی اکید و در بازه ی نزولی اکید و در بازه ی ثابت است.</p>  <p>د) اگر α و β ریشه های معادله ی درجه ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند ریشه های معادله ی درجه ی دوم $cx^2 + bx + a = 0$ برابرند با و ($c \neq 0$).</p>

شهریور ۹۱

۱	مقدار m را چنان بیابید که چند جمله ای $P(x) = 3x^3 - 2x + 2m$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد.	۱
۱	در شکل زیر، سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a, b, c و تعداد ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.	۲
		
۰/۷۵	معادله ی زیر را حل کنید. $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+9}$	۳
۱/۲۵	نامعادله ی $x^2 \leq x $ را به روش هندسی حل کنید.	۴

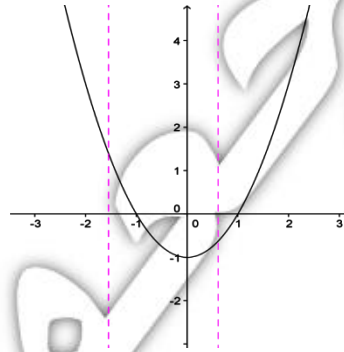
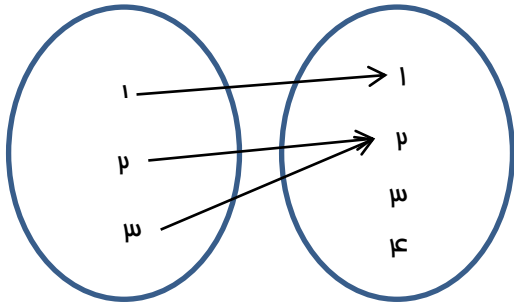
دی ۹۱

۱	مجموع بیست جمله ی اول دنباله ی حسابی زیر را بیابید. $-۵, -۳, -۱, \dots$	۱
۱	به کمک اتحادها، عبارت زیر را ساده کنید. $A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}$	۲
۱/۲۵	معادله ی زیر را حل کنید. $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 11(\frac{x^2}{3} - 2) + 10 = 0$	۳
۰/۷۵	با فرض آنکه a و b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید: $ ab = a b $	۴

فصل دوم: تابع

یادآوری (تابع):

با مفهوم تابع در سال قبل آشنا شدید و دیدید تابع یک رابطه‌ای است که هیچ دو زوج مرتبی از آن دارای مولفه اول برابری نباشد. نظیر تابع $f = \{(1, 5), (0, -1), (2, 5)\}$ همچنین مشاهده نمودید با توجه به نمودار، رابطه‌ای تابع است که در آن هر خطی که موازی محور y ها رسم شود، تابع را نهایتاً در یک نقطه قطع کند و یا اینکه در نمودار آن از هر عضو مجموعه اول، دقیقاً یک فلش خارج شود. نظیر:



$$f: A \rightarrow B$$

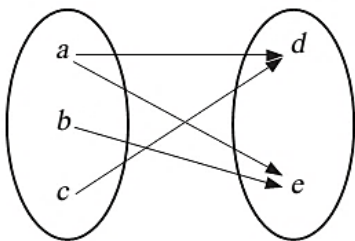
$$x \mapsto f(x)$$

در حالت کلی هر تابع از سه جزء تشکیل شده است: دامنه A ، هم‌دامنه B و ضابطه یا دستور تابع $f(x)$ ، به شکل:

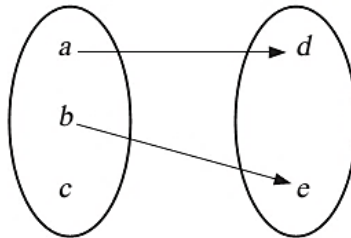
(هم‌دامنه لزوماً برابر برد تابع نمی‌باشد).

تمرین کتاب

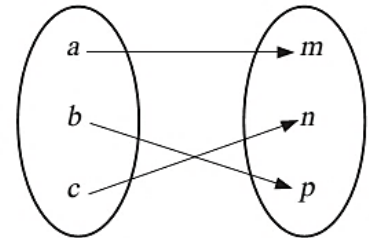
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کنند؟



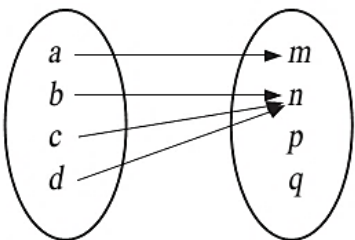
(ج)



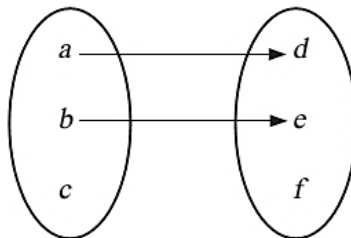
(ب)



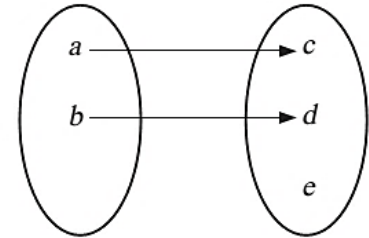
(الف)



(و)



(هـ)



(د)

$$f(-3) =$$

$$f(0) =$$

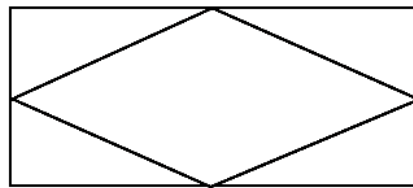
$$f(x+1) =$$

مثال: تابع $f(x) = \frac{x}{x+2}$ را داریم، حاصل عبارات مقابل را بیابید.

(امام باقر (ع) فرمودند: نماز ستون دین است، مثل آن همانند ستون فیمه است که وقتی استوار باشد میفها و طنابها پابرجاست، و هر گاه ستون آن کم و شکسته شود هیچکدام از آنها استوار نمی مانند.)

تمرین کتاب

- ۱- اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{p, q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟
- ۲- اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، چند تابع از A به B وجود دارد؟
- ۳- تابعی مثال بزنید که دامنه آن $(-\infty, +\infty)$ باشد.
- ۴- دو تابع مانند f و g بسازید که دامنه هر دو برابر $[2, 5]$ و برد هر دو $[0, 4]$ و f یک به یک باشد ولی g یک به یک نباشد.
- ۵- در مستطیلی به عرض w و محیط 40 متر یک لوزی محاط شده است. هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.



- ۶- اختلاف دو عدد برابر 12 است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچکتر بیان کنید.

۷- با ۱۵۰ متر زرده یک زمین مستطیل شکل را محصور و از وسط با زرده مانند شکل آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده ایم. مساحت ناحیه محصور شده را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیابید.



۸- توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f: [1, 2] \rightarrow IR$
 $f(x) = 3x - 1$

ب) $g: [-5, 5] \rightarrow IR$
 $g(x) = |x|$

۹- مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۲۵ سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن به دست آورید.

۱۰- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = |x|$ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(2x) = 2f(x)$

ب) $g(2x) = 2g(x)$

د) $g(x+2) = g(x) + 2$

ج) $f(x+2) = f(x) + 2$

یادآوری (دامنه توابع): دامنه ی یک تابع شامل همه ی اعداد حقیقی است که اگر در تابع قرار گیرند ماصِل مبهم نشود. سه دسته تابع را بررسی می کنیم:

۱. توابع چندجمله ای: دامنه ی این توابع همه ی اعداد حقیقی است. مثلاً:

$$f(x) = x^3 - \sqrt{px} + \frac{13}{p}x^4 - 1 \Rightarrow D_f =$$

۲. توابع کسری: دامنه ی این توابع شامل همه ی اعداد حقیقی است بجز ریشه های مخرج آن. مثلاً:

$$f(x) = \frac{px - 13}{x^p - 9x} \Rightarrow D_f =$$

۳. توابع رادیکالی: دامنه ی این توابع شامل همه ی اعداد حقیقی است بجز اعدای که زیر رادیکال را منفی کنند. مثلاً:

$$f(x) = \frac{5x - 1}{\sqrt{13x - 15}} \Rightarrow D_f =$$

$$f(x) = \sqrt{x^p - 14} \Rightarrow D_f =$$

((امام علی علیه السلام: اگر نماز گزار بداند تا چه حد مشمول رحمت الهی است هرگز سر خود را از سجده بر نخواهد داشت.))

۴. توابع مثلثاتی: داریم: $y = \cot x \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, $y = \tan x \Rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, $y = \cos x \Rightarrow D = \mathbb{R}$, $y = \sin x$ مثلا:

$$f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow D_f =$$

$$f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow D_f =$$

$$f(x) = \cos(x^p - px) \Rightarrow D_f =$$

$$f(x) = \cot\left(px - \frac{p\pi}{5}\right) \Rightarrow D_f =$$

۵. توابع لگاریتمی: داریم: $h(x) = \log_{g(x)} f(x) \rightarrow D_h = \{x | f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1\}$ مثلا:

$$f(x) = \log_{x-1} x \Rightarrow D_f =$$

$$f(x) = \log_{\sqrt{x}} 1 - x^p \Rightarrow D_f =$$

تساوی دو تابع:

دو تابع f و g مساویند هرگاه: الف) $D_f = D_g$ ب) $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$

مثال: کدام دسته از توابع زیر مساویند؟

$$۱- \begin{cases} f(x) = \begin{cases} \frac{x^p - x - p_0}{x - 5} & x \neq 5 \\ 11 & x = 5 \end{cases} \\ g(x) = x + 4 \end{cases}$$

$$۲- \begin{cases} f(x) = px - 1 \\ g(x) = \frac{4x - p}{p} \end{cases}$$

$$۳- \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ g(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} \end{cases}$$

$$۴- \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = \frac{x}{x} \end{cases}$$

$$۵- \begin{cases} f(x) = p \log x \\ g(x) = \log x^p \end{cases}$$

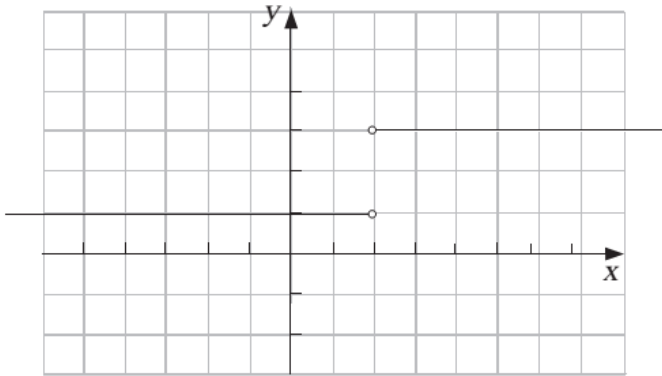
$$۶- \begin{cases} f(x) = \sin x \\ g(x) = \sqrt{1 - \cos^p x} \end{cases}$$

نکته: توابعی که برای قسمت‌های مختلف دامنه آن دستوره‌های مختلفی وجود دارد را توابع چندضابطه‌ای می‌گوییم. نظیر:

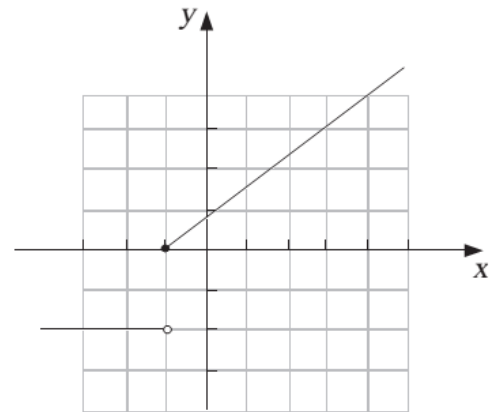
$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & x < 0 \\ px & x \geq 0 \end{cases}$$

تعریف کتاب

۱- در زیر نمودارهای دو تابع داده شده است. ضابطه‌های آن‌ها را بیابید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.



(ب)

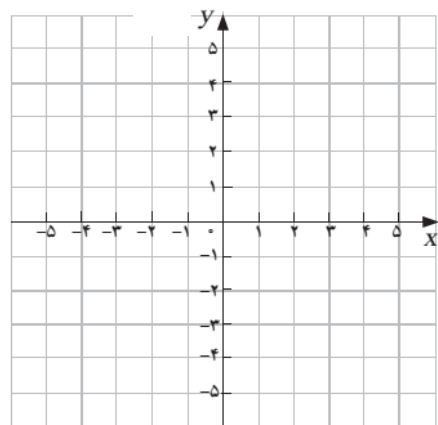
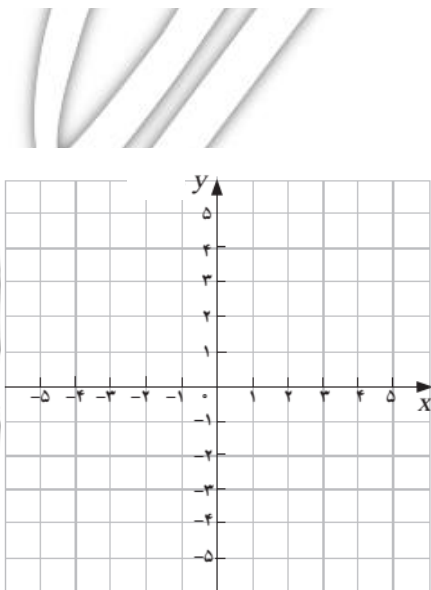


(الف)

۲- نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

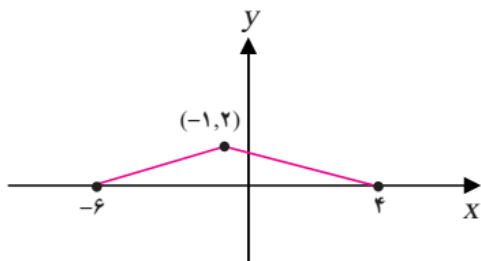
$$h(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < 1 \\ x - 4 & 1 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}$$



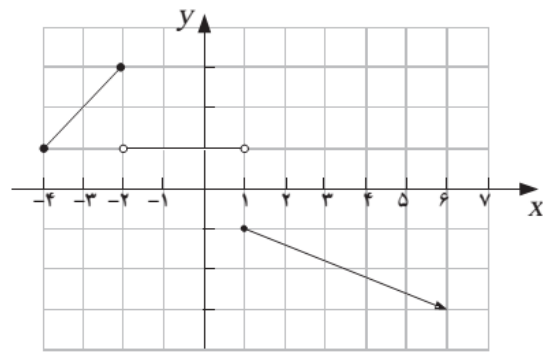
تعریف کتاب

۱- تابع $f(x) = |x+1| + |x-1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۲- دامنه و برد هر یک از توابع چند ضابطه‌ای زیر را بیابید و ضابطه هر کدام را بنویسید.



(ب)



(الف)

معادلات و توابع:

با توجه به تعریف تابع، معادلاتی تابع هستند که در ازای هر x از دامنه فقط یک مقدار برای y بدست آید. مثلاً معادله $x = y^2 + 4$ تابع نیست زیرا:

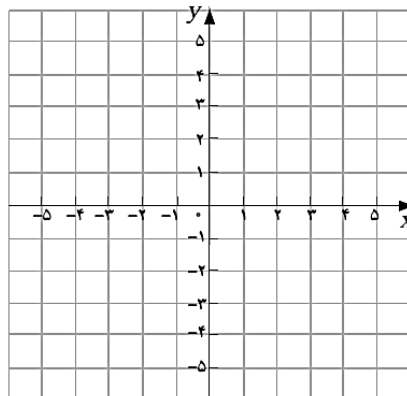
نکته: شرط تابع بودن یک رابطه $x_1 = x_p \Rightarrow y_1 = y_p$ و یا $x_1 \neq x_p \Rightarrow y_1 \neq y_p$ است.

مثال: نشان دهید رابطه $y = x^2 + 3$ تابع است. آیا $|y| = x^3 + 1$ تابع است؟ چرا؟

ادامه تعریف کتاب

۳- اگر

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 8 & x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & -2 \leq x \leq 4 \\ 10 - 2x & 4 < x \end{cases}$$



مقدارهای $f(0)$, $f(-4)$, $f(4)$, $f(6)$ را حساب کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

۴- تابعی چند ضابطه‌ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند، سپس نمودار f را رسم کنید.

الف) دامنه $f = [-3, 5]$ و برد $f = [-2, 7]$

ب) $f(0) = 3$

ج) f یک به یک نباشد.

۵- کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند.

الف) $x^2 + y^2 = 25$

د) $x = |y| + 1$

ب) $y = \begin{cases} x + 3 & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$

ه) $y^2 = x^2$

ج) $y = |x| + 1$

و) $x = 1$

۶- تابع f با مشخصات زیر داده شده است.

$$f(2) = 3 \text{ و } f(-5) = -2$$

ب) دامنه f برابر همه اعداد حقیقی است.

ج) تابع f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

د) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ه) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور x ها را در نقطه -3 قطع می‌کند.

تابع f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

۷- کدام یک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

الف) $f(x) = \sqrt{x^2}$ ، $g(x) = |x|$

ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$ ، $g(x) = x + 3$

ج) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$ ، $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$

د) $f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$ ، $g(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$

رسم توابع:

از طریق انتقال توابع می‌توان بسیاری از توابع را رسم کرد. به طور کلی و به عنوان مثال برای رسم تابع $y = \sqrt{x - a} + b$ کافیست تابع

$y = \sqrt{x}$ را با توجه به علامت a و b به اندازه a واحد به سمت (چپ) و به اندازه b واحد به سمت بالا (پایین) منتقل کنیم. برای سایر توابع

نیز مشابه همین کار عمل می‌کنیم.

مثال: توابع $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x-3} + 1$ را با توجه به نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

مثال: توابع $y = |x-2|$, $y = |x+4|$, $y = |x+3| + 1$ را با توجه به نمودار $y = |x|$ رسم کنید.

رسم تابع $af(x)$: برای رسم تابع $af(x)$ بر اساس تابع $f(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر $a > 1$ نمودار تابع به صورت عمودی با ضریب a کشیده می‌شود (انبساط عمودی) و اگر $0 < a < 1$ نمودار تابع به صورت عمودی با ضریب a جمع می‌شود (انقباض عمودی) و اگر $a < 0$ ابتدا نمودار تابع نسبت به محور x ها قرینه می‌شود و سپس به اندازه $|a|$ منقبض یا منبسط می‌شود. واضح است که طول‌ها ثابت و فقط عرض‌ها دچار تغییر می‌شوند.

مثال: توابع $y = 2x^p$ و $y = \frac{1}{3}x^p$ و $y = -3x^p$ را با توجه به نمودار $y = x^p$ رسم کنید.

تعریف کتاب

۱- دامنه‌های دو تابع $y = f(x)$ و $y = af(x)$ یکی است. در مورد بردهای این دو تابع چه می‌توانید بگویید؟

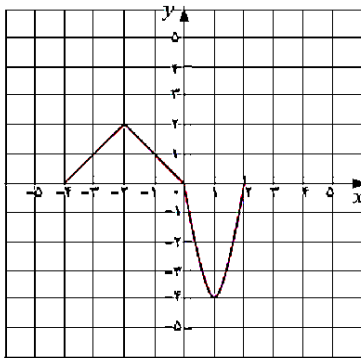
۲- نمودار تابع $f(x) = |x+2|$ را در بازه $[-4, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $f(x) = -|x+2|$ و $f(x) = \frac{1}{4}|x+2|$ را رسم کنید.

(رسم تابع $f(ax)$ برای رسم تابع $f(x)$ (که a عددی حقیقی و مثبت است) بر اساس تابع $f(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:
 اگر $a > 1$ نمودار تابع به صورت افقی با ضریب a جمع می‌شود (انقباض افقی) و اگر $0 < a < 1$ نمودار تابع به صورت افقی با ضریب a کشیده می‌شود (انبساط افقی). واضح است که عرض‌ها ثابت و فقط طول‌ها دچار تغییر می‌شوند.
 مثال: توابع $y = \sin(px)$ و $y = \sin(\frac{1}{p}x)$ را با توجه به نمودار $y = \sin x$ رسم کنید.

نکته: برای رسم تابع $f(-x)$ بر اساس تابع $f(x)$ کافیست نمودار تابع را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

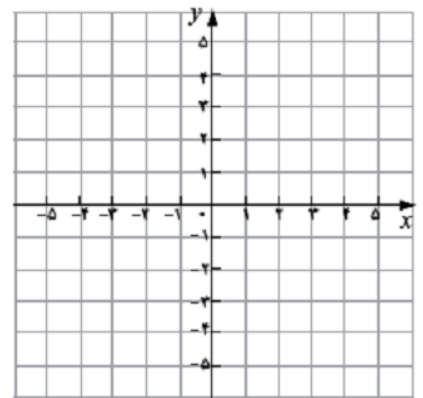
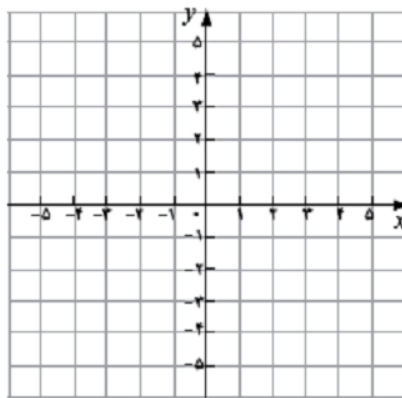
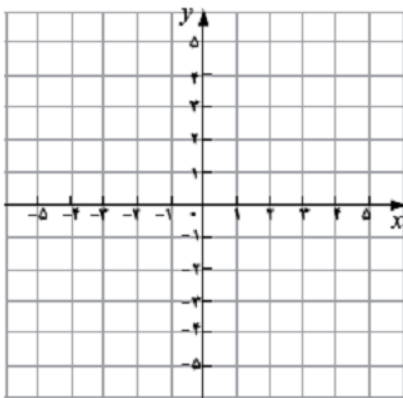
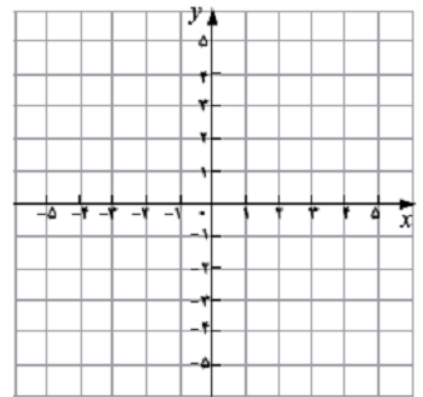
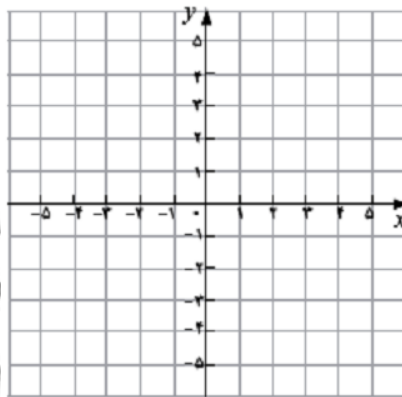
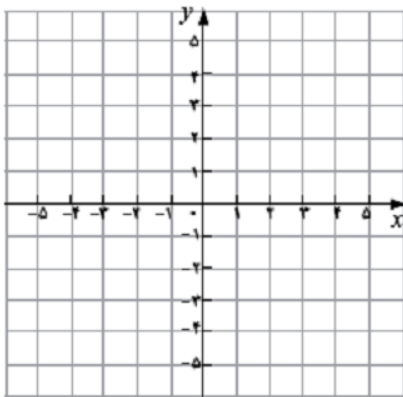
مثال: تابع $y = \sqrt{-x}$ و $y = -\sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{-x}$ را با توجه به نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

مثال: توابع $y = \sqrt{px-1}$ و $y = \sqrt{\frac{1}{p}x + p}$ و $y = \sqrt{-px+1} + 1$ را با توجه به نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

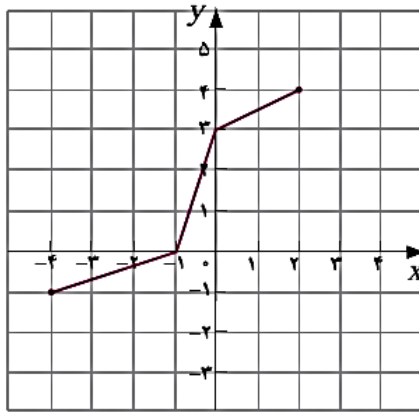


تمرین کتاب

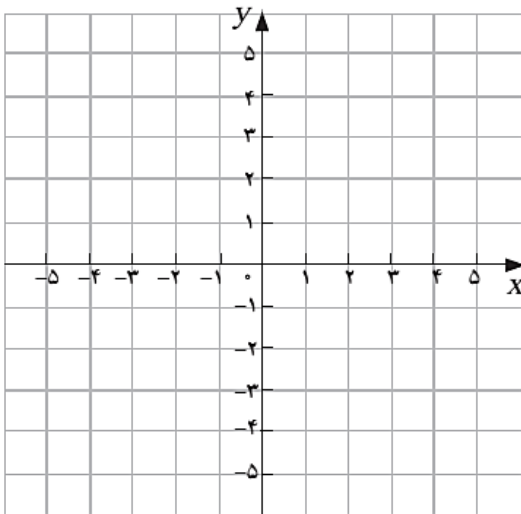
۱. نمودار تابع f به شکل زیر است، با توجه به این شکل نمودار توابع
 $-pf(x)$, $f(px)$, $f\left(-\frac{1}{p}x\right)$, $f(x-1) + p$, $f(p-x) - 1$, $-f(x-1)$ را بیابید.



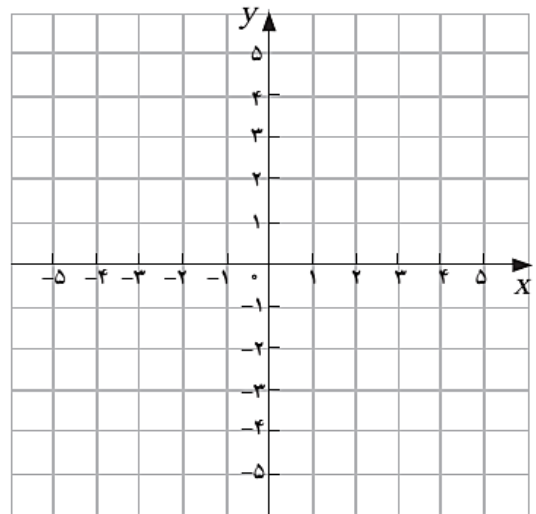
۲- نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است.



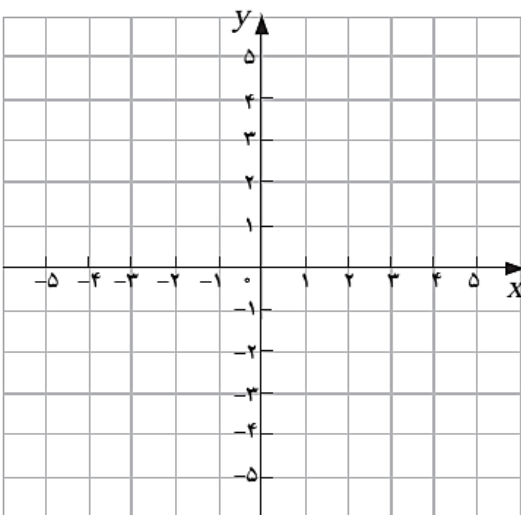
نمودار توابع داده شده زیر را رسم کنید.



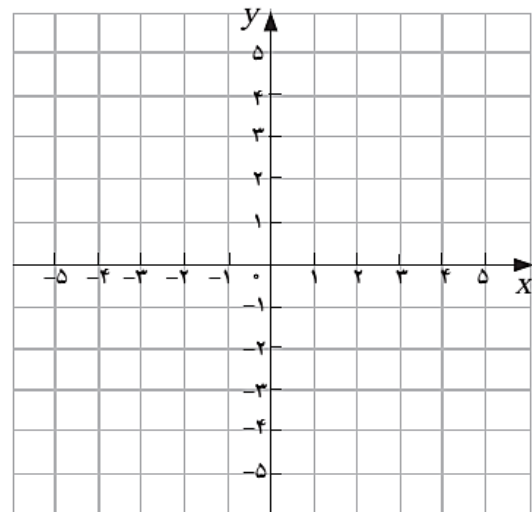
$$y = -f(x-1)$$



$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$



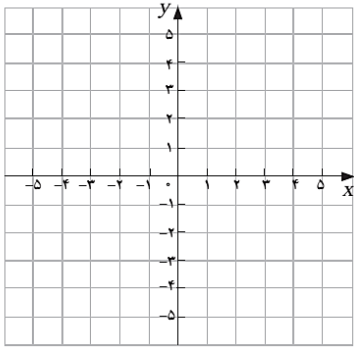
$$y = f(2x)$$



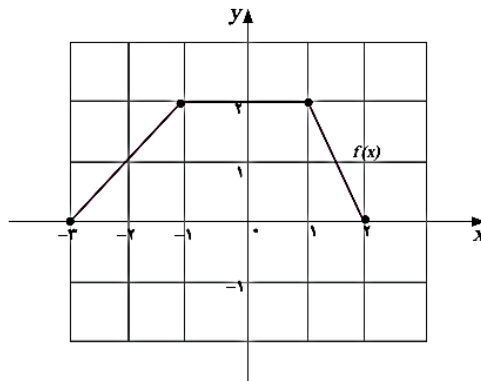
$$y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

تمرین کتاب

۱- ابتدا نمودار $f(x) = |x| + 2$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار $y = -3|x-1| + 2$ را رسم کنید.



۲- نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر داده شده است. به کمک این نمودار، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.



الف) $g(x) = \frac{1}{3} f(x)$

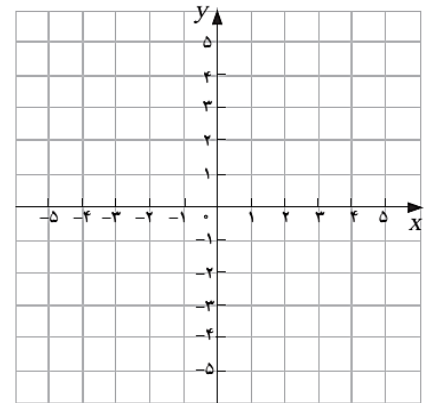
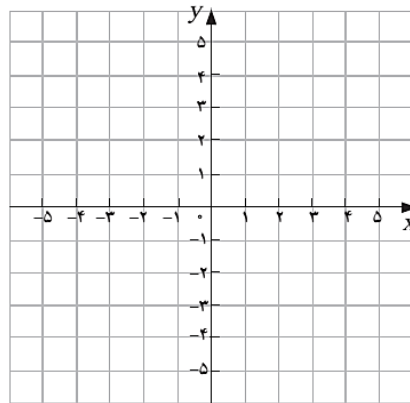
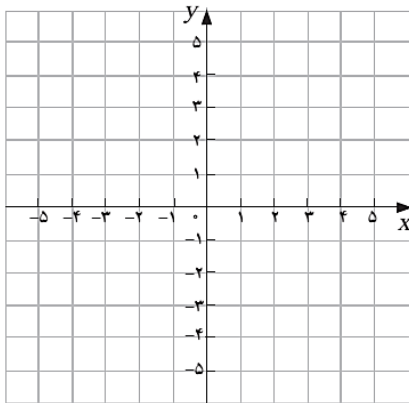
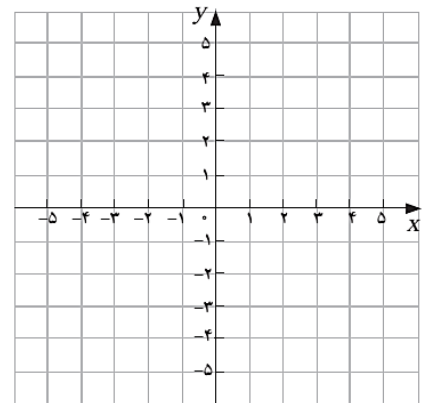
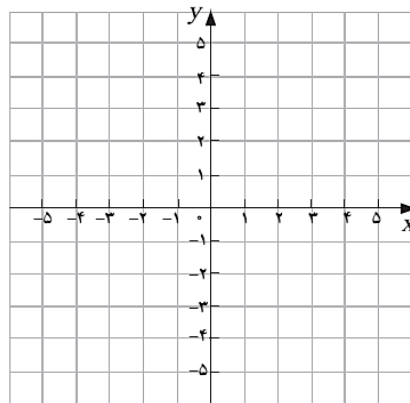
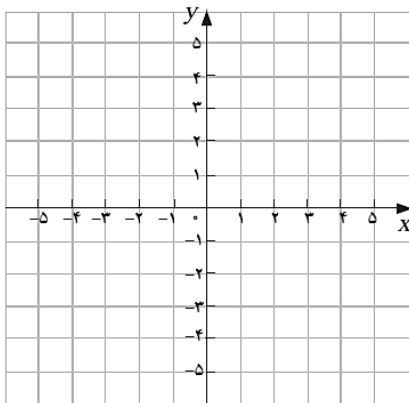
ب) $g(x) = f(-x)$

ج) $g(x) = f(3x)$

د) $g(x) = f(-\frac{1}{3}x)$

هـ) $g(x) = -2f(x)$

و) $g(x) = f(x+2)$



$$f(x) = \begin{cases} |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

به کمک نمودار $f(x)$ نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(-2x)$ و $y = -f(2x)$ را رسم کنید.

۴- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = |x+3| - 3$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت

راست و سپس انتقال سه واحد به پایین به دست آورد.

ب) $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ دارای نمودارهای یکسانی هستند.

ج) اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = -(x-2)^2 + 4$ آن‌گاه نمودار g را می‌توان از نمودار f با یک تغییر مکان به

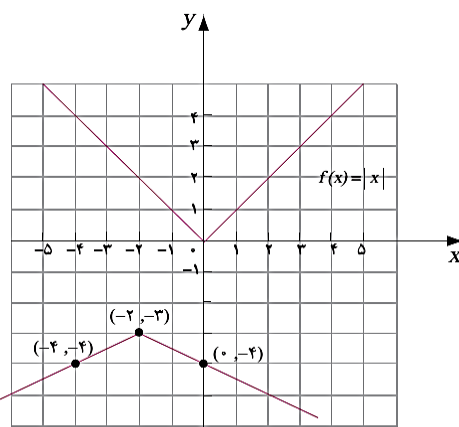
میزان دو واحد به راست، سپس انعکاس نسبت به محور x ها و ۴ واحد تغییر مکان به سمت بالا به دست آورد.

۵- در شکل روبه‌رو نمودار توابع f و g در یک دستگاه

مختصات رسم شده‌اند. اگر g از طریق تعدادی عملیات (انبساط

و انقباض و انتقال و قرینه) روی f به دست آمده باشد معادله‌ای

برای g بیابید.



۶- نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها، انعکاس داده‌ایم، سپس آن را سه واحد در جهت راست و بعد ۵

واحد به پایین حرکت داده‌ایم. ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.

۷- نقطه $(-۸, ۶)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. این نقطه با چه نقطه‌ای از نمودار توابع زیر متناظر

می‌شود؟

الف) $g(x) = \frac{1}{3} f(x)$

ب) $g(x) = f(-x)$

ج) $g(x) = f(x) - 3$

د) $g(x) = 3 f(x)$

۸- در هر مورد توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می‌آید.

الف) $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x-1} + 3$

ب) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = -2(x+4)^2 - 3$

ج) $f(x) = |x|$ ، $g(x) = -2\left|x - \frac{1}{3}\right| + 1$

۹- اگر $f(x) = \cos x$ مطلوب است نمودار $f(x)$ ، $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{3}x)$ ، $-f(x)$ ، $f(-x)$.

۱۰- نمودار دو تابع \sqrt{x} و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ جواب به این سؤالات در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ چه خواهد بود؟

۱۱- اگر $a < 0$ ، نمودار تابع $f(ax)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه ساخته می‌شود؟

اعمال جبری روی توابع:

چهار عمل اصلی روی توابع و دامنه آن‌ها به صورت زیر می‌باشند:

• $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ، $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

• $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ ، $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

• $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ ، $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

• $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$ ، $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ و $g(x) = \sqrt{3x - 2}$ باشد، حاصل عبارات $f + g$ ، g/f ، $f \times g$ را بیابید و دامنه آنها را بیابید.

مثال: اگر $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$ و $g = \{(1, -5), (2, 4), (3, 8)\}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$f + g =$$

$$2f =$$

$$2g =$$

$$f \times 2g =$$

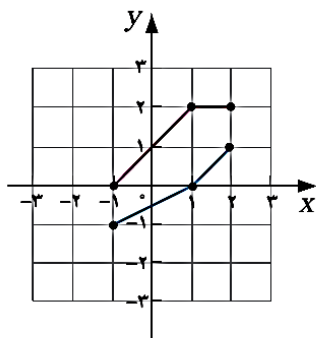
$$g/f =$$

$$f + 2$$

تعریف کتاب

۱- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x + 1$ ، دامنه‌های توابع $f+g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و ضابطه این توابع را مشخص کنید.

۲- نمودار توابع f و g در شکل مقابل رسم شده است.



الف) $(f+g)(1)$ ، $(f+g)(2)$ را حساب کنید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g ، نمودار $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

ج) معادله‌ای برای f و g بیابید.

د) نمودار $f+g$ را به کمک معادله آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

((امام صادق علیه السلام: تسبیحات فاطمه زهرا علیهاالسلام در هر روز پس از هر نماز نزد من محبوبتر از هزار رکعت نماز در هر روز است.))

ترکیب توابع:

ترکیب توابع به نوعی همان مقداردهی توابع می باشد و بصورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعریف می شود. در مورد دامنه fog فرمول مقابل را داریم: $D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$. واضح است که برای یافتن دامنه fog ابتدا می توان ضابطه fog را بدست آورد و سپس دامنه را مناسبه کرد.

مثال: توابع $f(x) = 4x - 1$, $g(x) = \frac{x+1}{2}$ را داریم. عبارات زیر را مناسبه کنید.

$(f \circ g)(x) =$

$(f \circ f)(x) =$

$(g \circ f)(x) =$

$(g \circ g)(x) =$

مثال: توابع $f(x) = 4 + x$, $g(x) = \sqrt{2x+1}$ را داریم. ابتدا عبارات $(g \circ f)(x)$ را مناسبه کنید سپس به دو روش $D_{g \circ f}$ را بیابید.

مثال: اگر $g(x) = x^p - 1$, $(g \circ f)(x) = x + 3$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

تمرین کتاب

- ۱- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 5$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را حساب کنید و نشان دهید که $f \circ g \neq g \circ f$.
- ۲- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{7-x^2}$ ، تابع $f \circ g$ و دامنه آن را حساب کنید.

تمرین کتاب

- ۱- اگر $f(x) = \frac{5x}{3x-7}$ و $g(x) = \frac{x^5-1}{5x-15}$ ، تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ و دامنه آن را بیابید.

۲- در هر یک از موارد زیر دامنه توابع زیر و ضابطه آنها را به دست آورید.

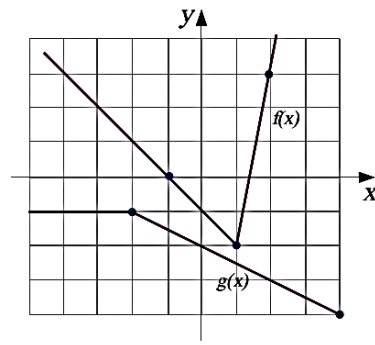
$$f \cdot g, ff, \frac{g}{f}$$

الف) $g(x) = 2 - x, f(x) = 4x$

ب) $g(x) = \frac{1}{6-x}, f(x) = \frac{4}{x-2}$

ج) $g(x) = \sqrt{x+2}, f(x) = \sqrt{x-2}$

د) $g(x) = \frac{2}{x}, f(x) = \sqrt{x+3}$



۳- با استفاده از نمودارهای f و g که در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند، عبارات داده شده را (در صورت امکان) محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(-4)$

د) $(fg)\left(\frac{1}{3}\right)$

ب) $(f-g)(3)$

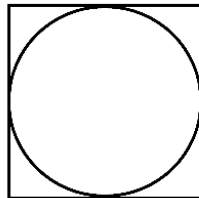
ه) $(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right)$

ج) $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$

و) $(f \circ f)(7)$

۴- فرض کنیم $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی با ضابطه $g(n) = 2n$ باشد، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و تابع $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به صورت $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ تعریف شود، توابع $f+g$ ، $g \circ f$ را محاسبه کنید.

۵- دو تابع $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ مفروضند. دامنه تابع $f \circ g$ را بدون محاسبه $(f \circ g)(x)$ بدست آورید.



۶- یک بی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازی (شکل مقابل) استفاده می‌شود.

الف) شعاع مخزن، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید.

ب) مساحت A پایه دایره‌ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید.

ج) $(A \circ r)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.

۷- فرض کنیم: $f = \left\{ (-4, 13), (-1, 7), (0, 5), \left(\frac{5}{7}, 0\right), (3, -5) \right\}$ و $g = \left\{ (-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6) \right\}$ توابع زیر را حساب کنید.

$$f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$$

۹- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

۱۰- توابع f, g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه، دامنه تعریف $f \circ g$ را به دست آورید.

۱۱- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه

$$(f \circ g)(x) = -x^2, (f \circ g)(5) = -25$$

ب) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 35$

ج) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

د) برای هر دو تابع f, g داریم: $f \circ g = g \circ f$

۱۲- اگر $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$ ، $g(x) = 2x + 1$ ، تابعی مانند f بیابید به قسمتی که $f \circ g = h$.

۱۳- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ و دامنه آن‌ها را به دست آورید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۳	۱	۴	۲	۲	۵
$g(x)$	۶	۳	۲	۱	۲	۳

۱۵- مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $f(g(1))$ ب) $g(f(1))$ ج) $f(f(1))$
د) $g(g(1))$ ه) $(g \circ f)(3)$ و) $(f \circ g)(6)$

۱۶- اگر $f = \{(4,5), (6,5), (8,12), (10,2)\}$ و $g = \{(4,6), (2,4), (6,8), (8,10)\}$ توابع $f \circ g, g \circ f$ را حساب کنید.

انواع توابع:

۱. توابع چندضابطه‌ای:

توابعی که برای قسمت‌های مختلف دامنه آن دستورهای مختلفی وجود دارد را توابع چندضابطه‌ای می‌گوییم. نظیر:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

۲. توابع زوج و فرد:

توابعی که نمودار آن‌ها نسبت به محور y متقارن باشند را توابع زوج و توابعی که نمودار آن‌ها نسبت به مبدا مختصات متقارن باشند را توابع فرد می‌نامیم. به عبارتی دیگر تابعی زوج است که دامنه آن متقارن باشد و $f(-x) = f(x)$ و تابعی فرد است که دامنه‌اش متقارن باشد و

$$f(-x) = -f(x)$$

مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را مشخص کنید.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x^2} \\ f(-x) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = |x+4| + |x-4| \\ f(-x) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \{(p,5), (0,0), (-p,5)\} \\ f(-x) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin^p x + \frac{x}{p} \\ f(-x) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = x+4 \\ f(-x) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \sin x}{x^p - 1} \\ f(-x) = \end{cases}$$

تمرین کتاب

۱- توابع زیر را در نظر بگیرید.

الف) $y = \frac{1}{x-x^2}$ ب) $y = 1-x^2$ ج) $y = \sqrt{x}$

د) $y = \sqrt[3]{x}$ هـ) $y = x-|x|$ و) $y = x\sqrt{|x|}$

(۱) دامنه کدام یک از توابع داده شده متقارن است؟

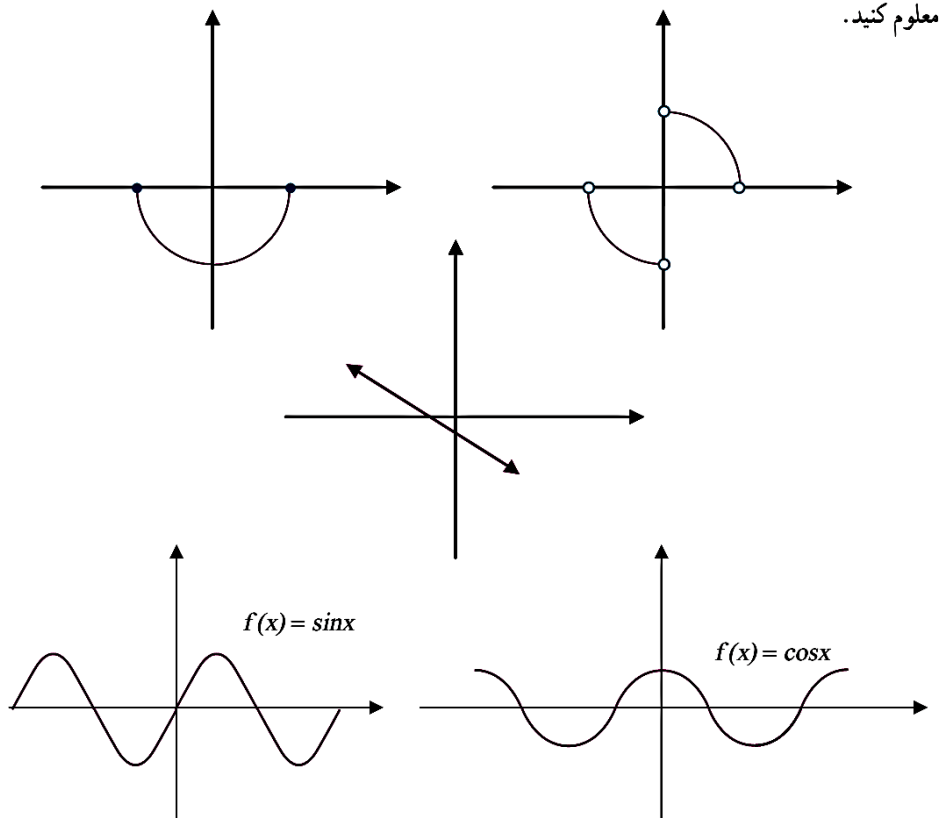
(۲) کدام یک از این توابع زوج هستند؟

(۳) کدام یک از این توابع فرد هستند؟

(۴) کدام یک از این توابع نه زوج هستند و نه فرد؟

۲- تنها با استفاده از نمودارهای توابع داده شده زوج یا فرد بودن آن‌ها یا نه زوج بودن و نه فرد بودن آن‌ها را

معلوم کنید.



۳. توابع صعودی و نزولی:

اگر با افزایش مقدار x مقدار تابع نیز افزایش یابد تابع صعودی نامیده می‌شود و داریم:

صعودی اکید $\forall x_1, x_p \in D_f, x_1 < x_p \Rightarrow f(x_1) < f(x_p)$ صعودی $\forall x_1, x_p \in D_f, x_1 < x_p \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_p)$

همچنین اگر با افزایش مقدار x مقدار تابع کاهش یابد تابع نزولی نامیده می‌شود و داریم:

نزولی اکید $\forall x_1, x_p \in D_f, x_1 < x_p \Rightarrow f(x_1) > f(x_p)$ نزولی $\forall x_1, x_p \in D_f, x_1 < x_p \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_p)$

۴. تابع ثابت: تابعی ثابت نامیده می‌شود که برد آن فقط از یک نقطه تشکیل شده باشد. یعنی: $\forall x_1, x_p \in D_f \Rightarrow f(x_1) = f(x_p)$.

مثلا تابع: $f(x) = 6$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید، دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید و مشخص کنید در کجا صعودی و در کجا نزولی هستند.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 4-x & 1 < x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 3-x & x < 0 \end{cases}$$

تمرین کتاب

توابع زیر را رسم کنید و با استفاده از نمودار آن‌ها تعیین کنید که در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت هستند.

الف) $f(x) = |x+2| - 3$

ب) $g(x) = x^2 - 6x + 10$

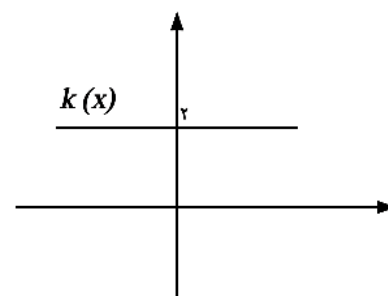
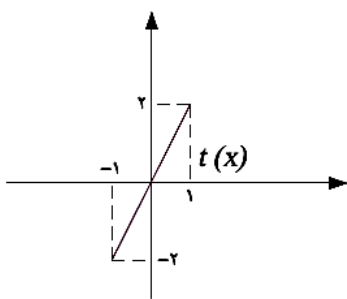
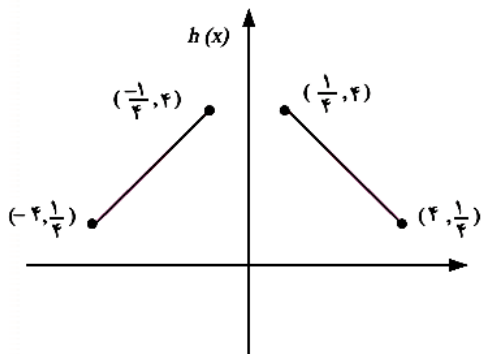
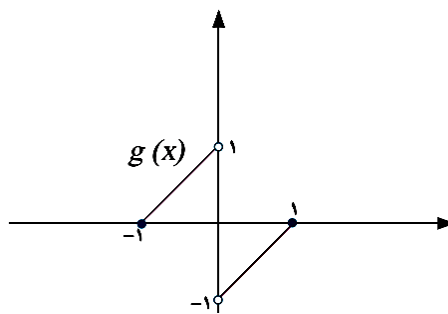
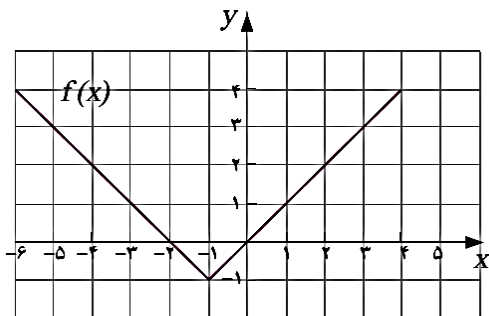
ج) $h(x) = \sqrt{1-x}$

د) $t(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$

تمرین کتاب

۱- نمودار توابع f, g, h, k و t در زیر داده شده‌اند.

به کمک این نمودارها تعیین کنید که کدام یک از آن‌ها زوج، کدام یک فرد و کدام یک نه زوج و نه فرد هستند.



۲- زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید:

الف) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$

ب) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3-1}$

ج) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

د) $f(x) = |x|$

ه) $f(x) = 2x + \sin x$

و) $f(x) = x^2 + 2x^8$

۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ب) حاصل ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ج) حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی فرد است.

د) حاصل ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج، تابعی زوج است.

۴- فرض کنید f تابعی با دامنه متقارن باشد، ثابت کنید :

الف) $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ تابعی زوج است.

ب) $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ تابعی فرد است.

ج) f را می توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

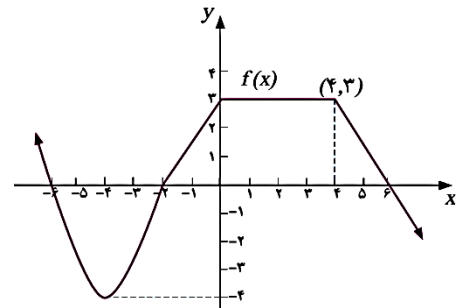
د) تابع $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 2\sqrt{1+x^2} - 5$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

۵- آیا تابعی یافت می شود که هم زوج باشد و هم فرد؟ چند تابع با این ویژگی داریم؟

۶- در هر یک از حالت های زیر نقطه ای از نمودار یک تابع داده شده است. نقطه دیگری از نمودار تابع را بیابید در صورتی که : (۱) تابع زوج باشد. (۲) تابع فرد باشد.

- الف) $(-7, 2)$ ب) (a, b) ج) $(-\frac{2}{7}, -7)$ د) $(5, 3)$

۷- با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ که در شکل زیر رسم شده است ، بازه هایی که تابع در آن ها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید.



۸- تعیین کنید توابع زیر در چه بازه هایی صعودی یا نزولی هستند.

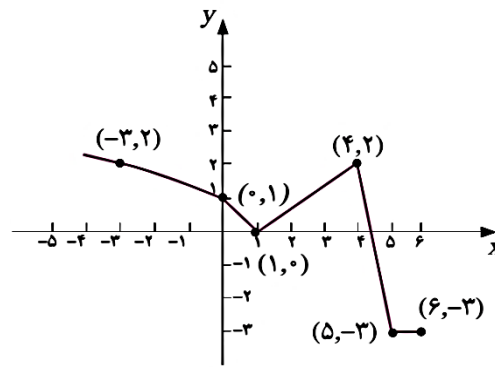
الف) $f(x) = \sqrt{x-2}$

ب) $f(x) = \frac{1}{x}$

ج) $f(x) = -|x-2| + 5$

د) $f(x) = \begin{cases} -3x-18 & x < -5 \\ 1 & -5 \leq x < 1 \\ x+2 & x \geq 1 \end{cases}$

۹- نمودار تابع $f(x)$ در زیر آمده است.



با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه و برد f را پیدا کنید.

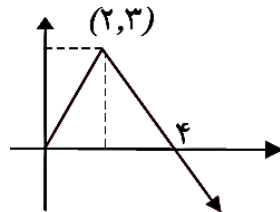
ب) بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x) < 0$ یا $f(x) > 0$ را بیابید.

ج) بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را بیابید.

د) معادله‌ای برای f بیابید (تابع برای مقادیر کمتر از ۱ یک تابع رادیکالی به شکل $\sqrt{ax+b}$ است).

ه) $f\left(\frac{5}{3}\right)$ ، $f(5/3)$ و $f(-4)$ را بیابید.

۱۰- نمودار تابع h در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

ب) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع فرد را نمایش دهد.

۱۱- مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 4a^2})$ یک تابع فرد باشد.

۱۲- زوج یا فرد بودن توابع f و g را که در زیر آمده است تعیین کنید.

$$f = \{(-2, 5), (-1, 4), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$$

$$g = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 0), (1, -2), (2, -1)\}$$

۵. تابع یک به یک: تابعی است که هیچ دو مولفه دو آن برابر یکدیگر نباشند. یعنی: $\forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
 مثال: ثابت کنید توابع $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x+1} - 2$ یک به یک است.

نکته: معمولاً تابعی که توان متغیر x در آن‌ها زوج می‌باشد یا این متغیر در قدرمطلق قرار داشته باشد، یک به یک نیستند.

مثال: آیا توابع $y = x^p + 1$ و $|y| = \frac{3x-1}{x+2}$ یک به یک هستند؟

تمرین کتاب

کدام یک از توابع زیر یک به یک است. در مورد (الف) و (ب) موضوع را با رسم نمودار توابع نیز بررسی کنید.

الف) $f(x) = 1 - x^2$ ب) $g(x) = \sqrt{2x-3}$ ج) $h(x) = \frac{x+6}{3x-4}$

تمرین کتاب

۱. کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.

الف) $f(x) = x^2 - 2x$ $x \geq 0$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$ $x > 0$

۲. با محدود کردن دامنه هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x-2|$ ب) $y = (x+3)^2$ ج) $y = \sin x$ د) $y = \cos x$

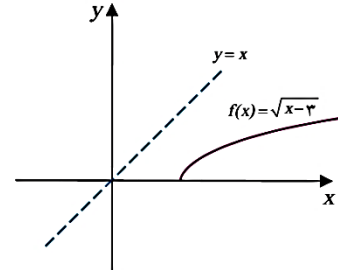
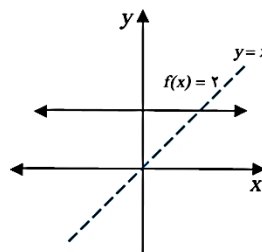
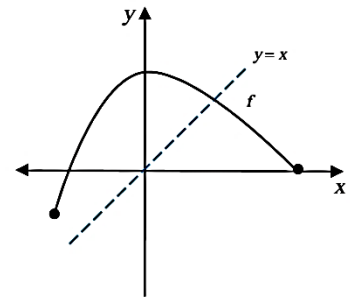
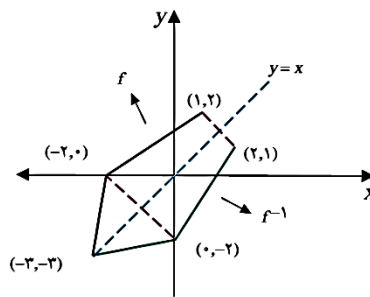
تعریف (تابع وارون): وارون تابع f را با f^{-1} نشان می دهیم و تعریف می کنیم: $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$. همه توابع یک به یک نیستند و تابع دلفواه f در صورتی وارون پذیر است که یک به یک باشد. برای یافتن وارون یک تابع کافیست تابع را نسبت به متغیر x مماسیه کنیم.

تذکره: نمودار تابع f با وارونش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارند و داریم:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(x) = x \in D_{f^{-1}} \\ (f^{-1}of)(x) = x \in D_f \end{cases}$$

تعریف کتاب

ابتدا تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند، سپس وارون هر کدام که یک به یک هستند را مانند نمونه در همان دستگاه مختصات رسم کنید. از خط $y = x$ برای سهولت استفاده کنید.



تعریف کتاب

نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون آن‌ها را به دست آورید.

ب) $g(x) = \frac{x-5}{2x+3}$

الف) $f(x) = \sqrt{x-2}$

مثال: ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ وارون پذیر است، سپس وارون آن را بیابید.

مثال: توابع $f(x) = \sqrt{x+4}$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ مفروضند، تساوی $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ را برای این دو تابع اثبات کنید.

تمرین کتاب

نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون آن‌ها را به دست آورید.

$$g(x) = \frac{x-5}{2x+3} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad (\text{الف})$$

((امام علی علیه السلام: فضای هر ظرفی در اثر محتوای فود تنگتر می‌شود مگر ظرف دانش که با تحصیل علوم، فضای آن بازتر می‌گردد.))

تمرین کتاب

۱- اگر $f(x) = \frac{7}{x} + 3$, $g(x) = \frac{7}{x-3}$, $h(x) = \frac{x-3}{7}$ ثابت کنید که f و g وارون یکدیگرند ولی g و h

وارون یکدیگر نمی‌باشند.

۲- آیا دو تابع $f(x) = \frac{2}{5}$, $g(x) = \frac{5}{4}$ وارون یکدیگرند؟

۳- اگر $y = m_1x + b_1$ و $y = m_2x + b_2$ معادله دو خط باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند،

نشان دهید $m_1m_2 = 1$.

تمرین کتاب

۱- تحقیق کنید که توابع $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$ وارون یکدیگرند. برای کدام مقادیر x داریم

$f(g(x)) = x$ و برای کدام مقادیر x داریم $g(f(x)) = x$ ؟

۲- فرض کنید تابع f دارای وارون است. اگر نمودار f در ربع اول واقع شود، نمودار f^{-1} در کدام ناحیه قرار

می‌گیرد؟

۳- نشان دهید تابع $f(x) = |x-2| + 3$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۴- در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = x^3 - 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x+5}$

ب) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 2$, $x \geq 0$

۵- نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

۶- وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند به دست

آورید.

الف) $f(x) = (x+5)^2$, $x \geq -5$

ب) $f(x) = -|x-1| + 1$, $x \geq 1$

ج) $f(x) = (x-3)^2$

د) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۷- نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{3x-2}{5x-3}$ وارون خودش است.

۸- تابع $f(x) = ax+b$ $a \neq 0$ داده شده است همه مقادیر a, b را که به ازای آنها $f^{-1}(x) = f(x)$ را

بیابید.

$$9- \text{ در مورد وارون پذیری تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x \end{cases} \text{ تحقیق کنید.}$$

۱۰- اگر $f(x) = x+3$ ، $g(x) = 3x-7$ با محاسبه نشان دهید $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

۱۱- اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه

$$h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2 \text{ به دست می آید.}$$

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می کند؟

۶. توابع چندجمله‌ای: صورت کلی یک تابع چند جمله‌ای بصورت زیر است:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1, (a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R})$$

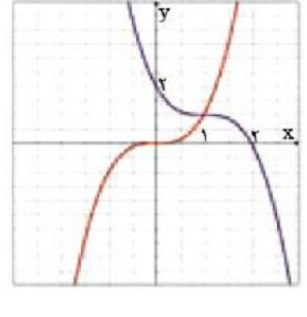
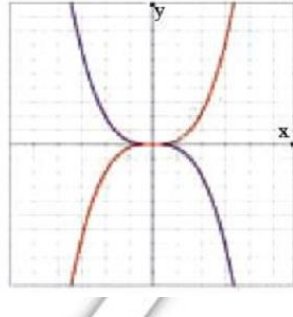
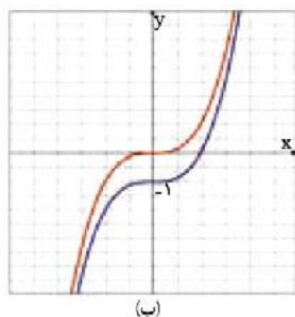
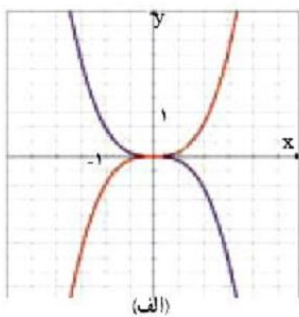
تذکره: بر اساس مقدار n درجه چند جمله‌ای تعیین می‌شود. مثلاً: $y = x + 1$ چند جمله‌ای درجه یک است.

تذکره: اگر داشته باشیم: $n = 0$ تابع ثابت و اگر $n = 1$ خط راست و اگر $n = 2$ سهمی تشکیل می‌شود.

تمرین کتاب

۱- نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ را در همان دستگاه مختصات به همراه نمودار $y = x^3$ رسم کنید.

۲- در هریک از شکل‌های زیر نمودار تابع $y = x^3$ و نمودار یک تابع دیگر که به کمک آن به دست آمده است در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. ضابطه نمودار تابع جدید را بنویسید.



۳- نمودار توابع $y = (x + \frac{3}{4})^3$ و $y = (x - 1)^3 + 2$ و $y = 2x^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

۷. توابع متناوب: تابع f متناوب نامیده می‌شود هرگاه عددی حقیقی نظیر T داشته باشیم که: $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x + T) = f(x)$ کوچکترین مقدار T با فاصیبت بالا را دوره تناوب تابع می‌نامیم.

مثال: در حالت کلی دوره تناوب توابع $\sin(ax + b), \cos(ax + b)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد. و دوره تناوب $\tan(ax + b), \cot(ax + b)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

مثال: دوره تناوب توابع $\sin \frac{1}{p} x, \cos \frac{1}{p} x, \tan \frac{1}{p} x$ را بیابید.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x) = \cos \frac{\pi}{a} x$ برابر $\frac{1}{a}$ است. مقدار a را بیابید.

نکته: برای مناسبه دوره تناوب توابعی که خود از جمع و تفریق چند تابع دیگر تشکیل شده‌اند، معمولاً از ک.م.م دوره‌های تناوب این توابع استفاده می‌کنیم.

۸. توابع پله ای و جزء صحیح: تابعی که آن‌ها را بتوان بر اساس دامنه‌شان به بازه‌هایی دسته‌بندی کرد که در هر بازه مقداری ثابت باشند، توابع پله‌ای نامیده میشوند. همچنین تابعی که به هر عدد حقیقی نظیر x ، اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن را نسبت دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود. تابع جزء صحیح با نماد $f(x) = [x]$ نمایش داده می‌شود. داریم: $\mathbb{R} = D_f$ ، $\mathbb{Z} = R_f$.

مثال: $\left[\frac{1}{2}\right] =$ ، $[-2/1] =$ ، $[2/5] =$ ، $[2] =$

نکته: اگر a یک عدد صحیح باشد، داریم:

$$[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1, [x+a] = [x] + a, x-1 < [x] \leq x \Rightarrow 0 \leq x - [x] < 1, [x] \leq x < [x] + 1$$

مثال: در معادلات $[2x+5] = 1$ ، $\left[\frac{x+1}{2}\right] = -1$ ، $2[3x-8] - 4 = 6$ ، $[1-5x] + 6 = 10$ ، محدوده x را بیابید.

نکته: برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$[-x] = \begin{cases} -x & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ و } [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: برای رسم توابع جزء صحیح، ابتدا عبارت دافل گروه را به بازه‌هایی به طول یک دسته‌بندی می‌کنیم و بعد از یافتن مقدار عددی تابع و محدوده x ، به رسم تابع می‌پردازیم.

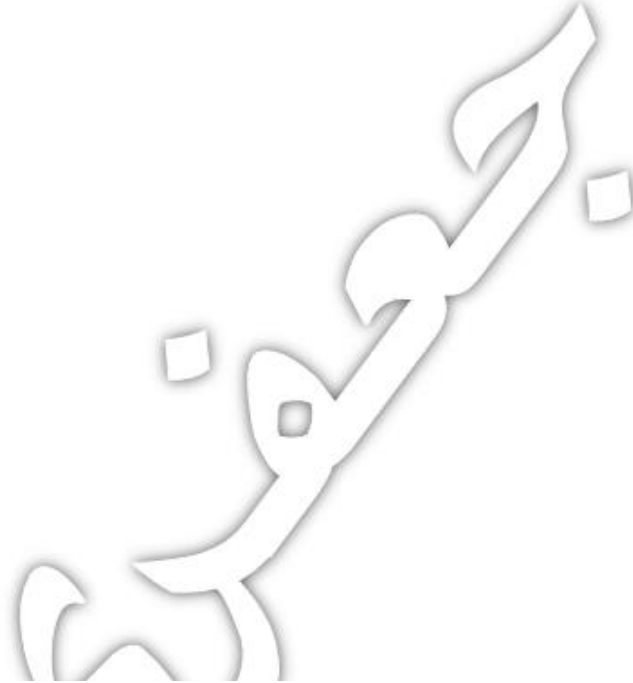
مثال: توابع $y = [x]$ ، $y = [2x] + 1$ ، $y = [x] + x$ و $y = [x] + [-x]$ را رسم کنید.

تعریف کتاب

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -3 \\ -1 & -1 \leq x < 4 \\ 2 & 4 \leq x \end{cases}$$

۱- تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

۲- نمودار تابع $y = [\frac{1}{3}x]$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید.



۳- وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

۴- نمودار توابع زیر را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

الف) $y = 2[x]$ ب) $y = [-x]$

۵- نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۶- نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

الف) $y = [x] - \frac{1}{4}$ ب) $y = 2[x] + 1$



((امام علی علیه السلام: علم گنم بزرگی است که با فرج کردن تمام نمی شود.))

۳- وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

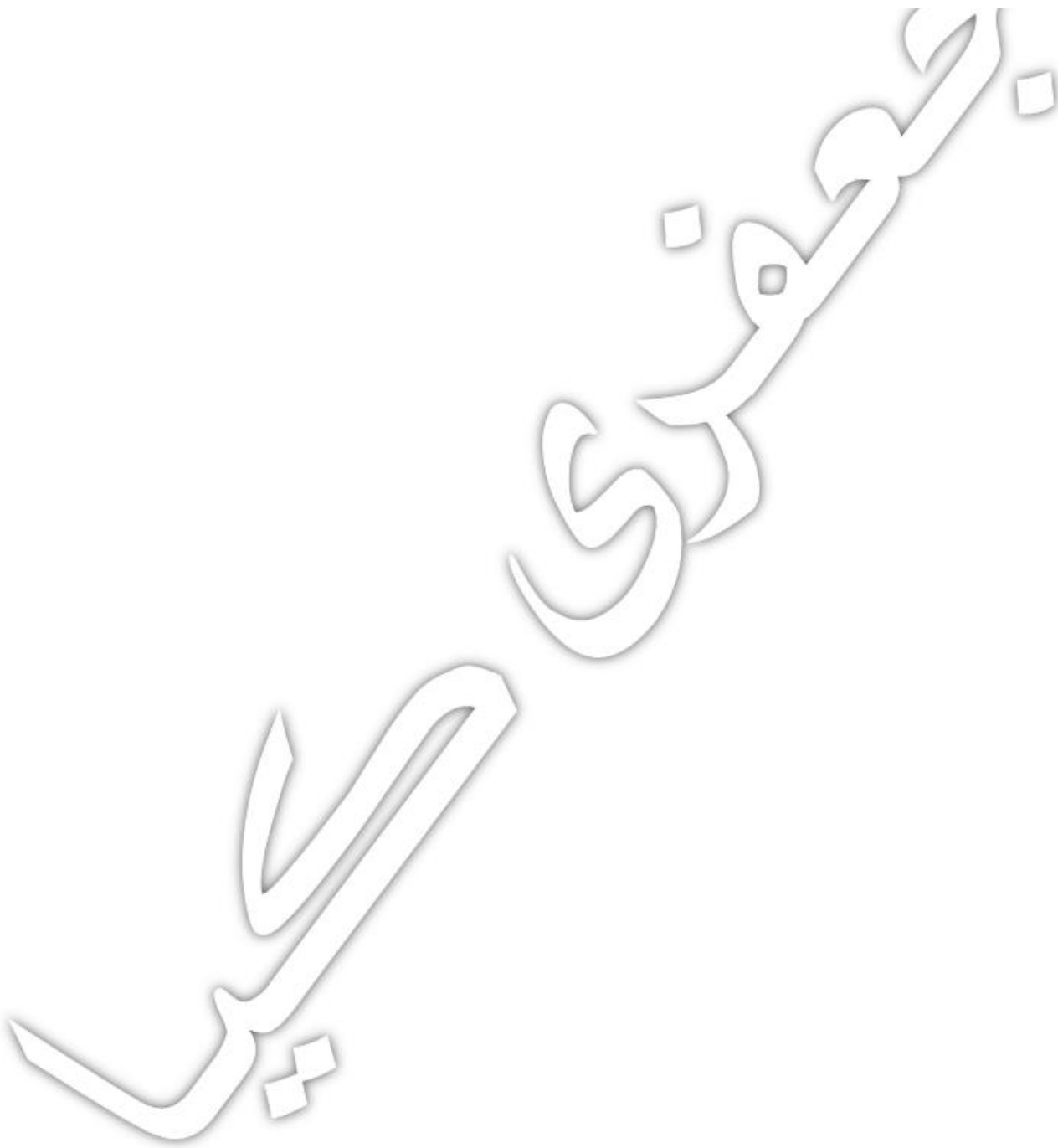
۴- نمودار توابع زیر را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

الف) $y = 2[x]$ ب) $y = [-x]$

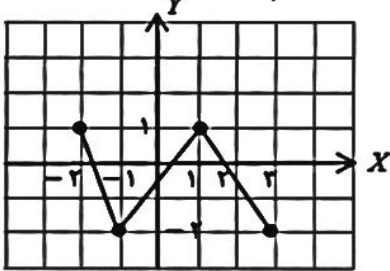
۵- نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۶- نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

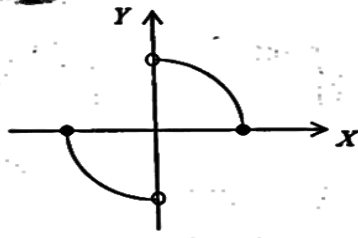
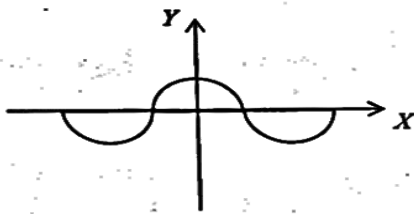
الف) $y = [x] - \frac{1}{4}$ ب) $y = 2[x] + 1$



شهریور ۹۴

۰/۷۵	<p>۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل مقابل است. با استفاده از انتقال، نمودار تابع $y = f(\frac{1}{3}x) + 1$ را رسم کنید.</p> 	
۱/۲۵	<p>۶ دو تابع $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-4}$ را در نظر بگیرید. الف) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید. ب) مقدار $(f \circ g)(5)$ را محاسبه کنید.</p>	
۱	<p>۷ زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x^2 - \sin x$ را بررسی کنید.</p>	
۱	<p>۸ تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟</p>	

فرداد ۹۳

۰/۵	<p>زوج یا فرد بودن توابعی که نمودار آن ها در زیر آمده است را مشخص کنید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>(ب)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(الف)</p> </div> </div>	۵
۱	<p>دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. الف) مقدار $(f+g)(0)$ را به دست آورید. ب) دامنه $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.</p>	۶
۱	<p>اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه ای مشخص کنید که $(fog)(x) = x^2 - 4x + 5$.</p>	۷
۱	<p>آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.</p>	۸

شهریور ۹۳

۰/۷۵	۵	ایا در معادله $x^2 - y^2 = 1$ ، y را می توان به صورت تابعی از x مشخص کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.
۱/۲۵	۶	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x - 1 $ را با دامنه $[0, 2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$ را رسم کرده و برد آن را به دست آورید.
۱	۷	دو تابع $f = \{(1, 3), (-2, 5), (0, 7), (2, -4)\}$ و $g = \{(1, 4), (3, 1), (0, 0), (5, -2)\}$ را در نظر بگیرید. الف) تابع $f \times g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید. ب) مقدار $f \circ g(0)$ را به دست آورید.
۱	۸	نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[0, 1]$ رسم کنید.

دی ۹۳

۱		<p>ضابطه‌ی تابع f که نمودار آن در زیر آمده است را بیابید.</p>	۵
۱/۲۵		<p>اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ و $g(x) = \frac{1}{x+2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را تعیین کنید.</p>	۶
۱		<p>زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x^4 + x^2}$ را مشخص کنید.</p>	۷
۰/۷۵		<p>ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = \sqrt{2x+2}$ را به دست آورید.</p>	۸

فرداد ۹۲

	ب) وارون تابع $y = \frac{2x+1}{x-3}$ برابر است با تابع	
۵	آیا دو تابع زیر با هم مساویند؟ چرا؟ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & x \neq 5 \\ 6 & x = 5 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x+5$	۰/۷۵
۶	ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم نموده سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید.	۱
۷	الف) مقدار $2(f-g)(4)$ را به دست آورید. ب) دامنه ی تابع $f \circ g$ را بیابید.	۱/۷۵

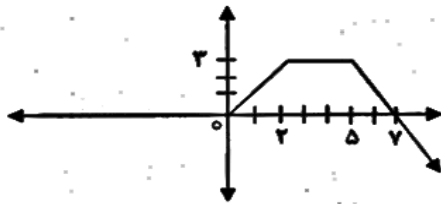
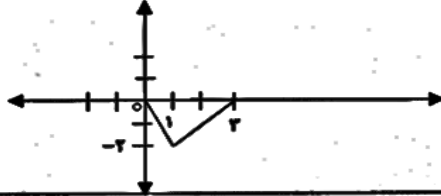
شهریور ۹۲

۱	اگر $f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ و $g = \{(1,2), (3,5)\}$ دوتابع باشند : الف) تابع $f + g$ را به صورت زوج های مرتب مشخص کنید. ب) مقدار $(g \circ f)(3)$ را بیابید.	۵
۱/۵	ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید سپس بازه هایی را که در آن تابع ، صعودی اکید ، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$	۶
۱/۵	وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون پذیر بودن تابع ، ضابطه ی وارون آن را به دست آورید. $f(x) = \sqrt{x+3} - 5$	۷

دی ۹۲

۱/۲۵	<p>نمودار تابع چند ضابطه ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} 2+x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$	۵
۱/۲۵	<p>دو تابع $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$ را در نظر بگیرید. الف) دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را بدون محاسبه‌ی $(g \circ f)(x)$ به دست آورید. ب) ضابطه‌ی $g \circ f$ را به دست آورید. ج) مقدار $(\frac{f}{g})(2)$ را محاسبه کنید.</p>	۶
۱	<p>جاهای خالی را با عبارات و اعداد مناسب پر کنید. الف) دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin 2x$ برابر با است. ب) مقدار تابع $f(x) = [x + 1]$ به ازای $x = \sqrt{2}$ می باشد. ج) وارون تابع $y = x^3$، تابع است.</p>	۷

فرداد ۹۱

	<p>ج (تابع زیر در بازه ی صعودی اکید و در بازه ی نزولی اکید و در بازه ی ثابت است.</p> 
۱/۲۵	<p>۵ در زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال، ابتدا نمودار تابع $y = f(x-۳)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y = -۲f(x-۳)$ را رسم کنید.</p> 
۱	<p>۶ اگر $f(x) = \sqrt{x-۳}$ و $g = \{(۰, ۴), (۳, ۲), (۵, ۶)\}$ دوتابع باشند:</p> <p>الف) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید.</p> <p>ب) دامنه ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.</p>
۱	<p>۷ ثابت کنید تابع $f(x) = (x-۲)^۲$، $x \geq ۲$ وارون پذیر است سپس ضابطه ی وارون آن را بنویسید.</p>

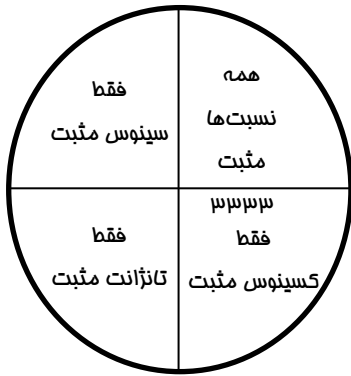
شهریور ۹۱

۱/۷۵	اگر $f(x) = \frac{۳}{x-۲}$ و $g(x) = \frac{۴}{x}$ باشد، آن گاه حاصل عبارت های زیر را به دست آورید. الف) $(\frac{۲f}{g})(۴)$ ب) D_{fog}	۵
۱	زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = ۲x + \sin x$ را مشخص کنید.	۶
۱/۲۵	نمودار تابع $y = [x] + ۲$ را در بازه ی $[-۱, ۲]$ رسم کنید.	۷

دی ۹۱

۱	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x - 3 $ را در بازه $[2, 4]$ رسم کنید سپس به کمک آن، نمودار تابع $f(-x)$ را رسم کنید.	۵
۱/۲۵	زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x^2 + \cos x$ را معلوم کنید.	۶
۱/۷۵	اگر $f = \{(4, 5), (6, 3), (7, 1)\}$ و $g = \{(3, 4), (6, 0), (4, 6)\}$ دو تابع باشند: الف) توابع $\frac{f}{g}$ و fog را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) مقدار $(2f + g)(4)$ را بیابید.	۷

فصل سوم: مثلثات



یادآوری:

- مثبت بودن توابع مثلثاتی در نوامی مختلف دایره مثلثاتی را از قانونی که آن را برای راحتی کار "هستک" می‌نامیم می‌توان تشخیص داد. (تانژانت و کتانژانت همواره هم‌علامتند)

$$\sin(4\pi - x) =$$

۲. در مورد نسبت های مثلثاتی زاویه های $(pk\pi \pm \alpha)$ ، می‌توانیم $pk\pi$ را حذف کنیم. مثلا: نکته: توابع تانژانت و سینوس فرد هستند.

۳. در مورد نسبت های مثلثاتی زاویه های $\left(\frac{p\pi}{p} \pm \alpha\right)$ و $\left(\frac{\pi}{p} \pm \alpha\right)$ باید بدانیم که تغییر نسبت انجام می‌شود (مثلا سینوس به کسینوس) و علامت آن نیز بر اساس مکان انتهای کمان (هستک) تعیین می‌شود.

$$\tan\left(\frac{7\pi}{p} - \alpha\right) =$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{p} + x\right) = \quad \text{و} \quad \cos\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) =$$

۴. در مورد نسبت های مثلثاتی زاویه های $(\pi \pm \alpha)$ باید بدانیم که نسبت مثلثاتی تغییر نمی‌کند و مانند حالت قبل علامت آن نیز بر اساس مکان انتهای کمان (هستک) تعیین می‌شود.

$$\tan(9\pi + \alpha) =$$

$$\cos(\pi - \alpha) =$$

$$\sin(7\pi - \alpha) =$$

مثال:

۵. اتمادهای مثلثاتی مهم: $\sin^p x + \cos^p x = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, $1 + \tan^p x = \frac{1}{\cos^p x}$

مثال: ثابت کنید: $(\sin x + \cos x)^p = 1 + p \sin x \cos x$ و $1 + \tan^p x = \frac{1}{\cos^p x}$

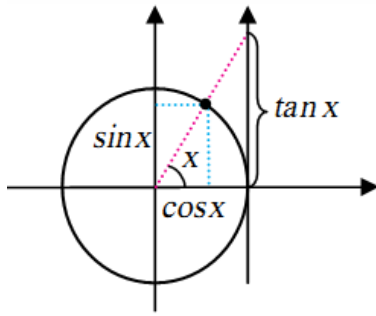
مثال: اگر $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ و $\cos \beta = \frac{p}{5}$ و انتهای هر دو زاویه در نامیه چهارم باشد، $\sin \beta$ ، $\cos \alpha$ را بیابید.

۶. رابطه سینوس‌ها و کسینوس‌ها: مثلث دلفواه ABC را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$a^p = b^p + c^p - 2bc \cos A, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال: در مثلثی اندازه اضلاع برابر ۲، ۳ و $\sqrt{7}$ هستند. زاویه مقابل به ضلع $\sqrt{7}$ را بیابید.

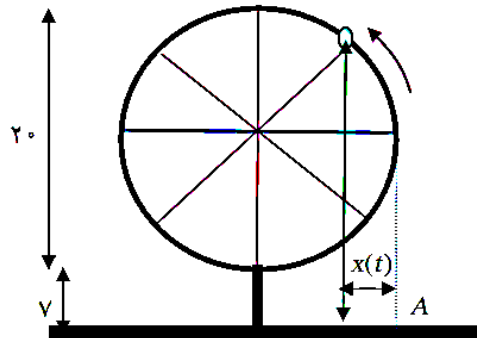
حضرت امام علی (علیه السلام) فرموده‌اند: ((کسی که در آموخته های فود بسیار بیاندیشد، دانش فود را استوار ساخته و به فهم مطالبی که نمی‌فهمد ناائل می‌گردد.))



۷. مقدارهای نسبت‌های مثلثاتی: با توجه به شکل می‌توانیم مقدار مثلثاتی زاویه X را مناسبه کنیم، برای این منظور کافیه از نقطه مورد نظر، بر محورهای سینوس و کسینوس عمود کنیم تا مقدار این دو نسبت بدست آید. همچنین با توجه به محل تقاطع امتداد خط واصل بین مرکز دایره و نقطه مورد نظر با محور تانژانت، مقدار تانژانت بدست می‌آید.

تقرین کتاب

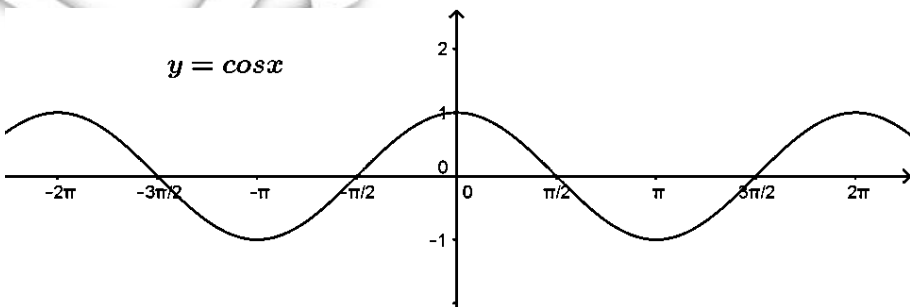
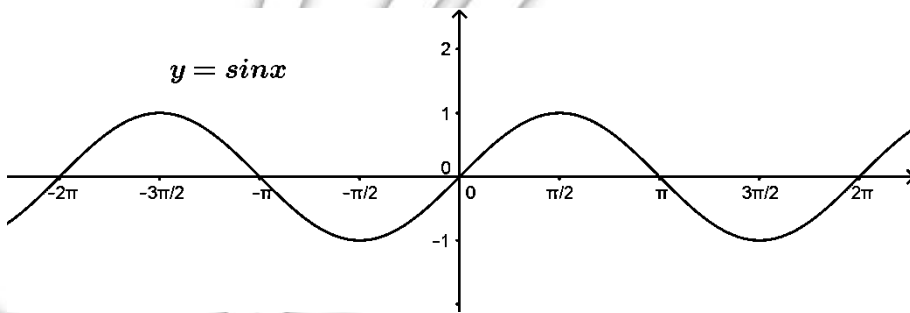
فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۰ متر داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض



کنید پایین‌ترین نقطه چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد، و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه $t = ۰$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است. می‌خواهیم در هر لحظه ارتفاع این کابین از سطح زمین را مشخص کنیم.

- ۱- پس از گذشت t ثانیه، کمانی که کابین طی می‌کند چند رادیان است؟
- ۲- پس از گذشت t ثانیه، کابین چند متر بالای قطر افقی قرار دارد؟ (اگر کابین زیر قطر افقی باشد این عدد را منفی حساب کنید.)
- ۳- تابعی که ارتفاع کابین را (بر حسب متر) نسبت به زمان (بر حسب ثانیه) نشان می‌دهد بنویسید.
- ۴- اگر در لحظه t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه A را با $x(t)$ نشان دهیم، این تابع را به دست آورید.

۸. نمودار نسبت‌های مثلثاتی:

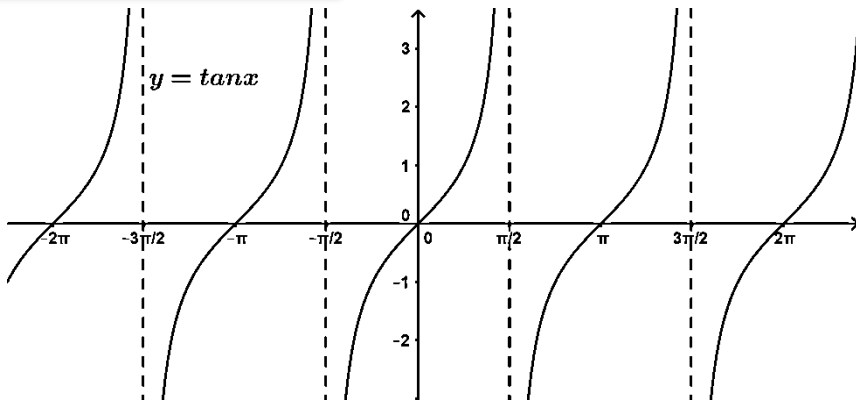


الف) سینوس: با توجه به نمودار این تابع داریم:

۱. دوره تناوب تابع $T = ۲\pi$ است.
۲. در نامیه اول و چهارم صعودی و در نامیه دوم و سوم نزولی است.
۳. این تابع تابعی فرد است و دامنه آن همه اعداد حقیقی است.

ب) کسینوس: با توجه به نمودار این تابع داریم:

۱. دوره تناوب تابع $T = ۲\pi$ است.
۲. در نامیه اول و دوم صعودی و در نامیه سوم و چهارم صعودی است.
۳. این تابع تابعی زوج است و دامنه آن همه اعداد حقیقی است.

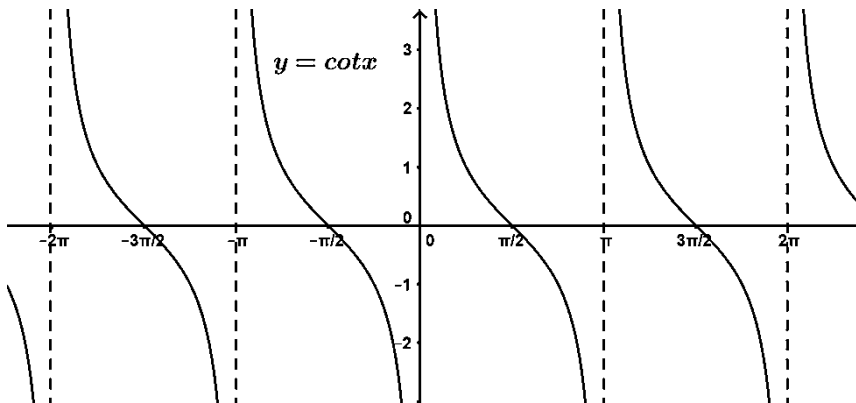


ج) تانژانت: نمودار این نسبت به صورت زیر است، با توجه این نمودار داریم:

۱. دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \left\{ (pk+1)\frac{\pi}{p} \right\}$ است.

۲. تانژانت در دامنه تعریفش همواره تابعی صعودی است و دوره تناوب آن $T = \pi$ است.

۳. در بازه $\left(-\frac{\pi}{p}, +\frac{\pi}{p} \right)$ این تابع فرد است.



د) کوتانژانت: نمودار این نسبت به صورت زیر است، با توجه این نمودار داریم:

۱. دامنه تابع برابر $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ است.

۲. کوتانژانت در دامنه تعریفش همواره تابعی نزولی است و دوره تناوب آن $T = \pi$ است.

۳. در بازه $\left(-\frac{\pi}{p}, +\frac{\pi}{p} \right)$ این تابع فرد است.

مماسیه نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$:

فرض کنیم α و β دو زاویه دلفواه باشند. از روابط زیر برای مماسیه نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل این دو زاویه استفاده می‌کنیم:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

الف) مماسیه نسبت‌های مثلثاتی $\sin(\alpha \pm \beta)$: داریم:

مثال: مقدار $\sin 105^\circ, \sin 75^\circ$ را بیابید.

مثال: نشان دهید: $\sin p\alpha = p\sin\alpha\cos\alpha$

مثال: مقدار $\sin 120^\circ$ را بیابید.

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$

ب) مماسیه نسبت‌های مثلثاتی $\cos(\alpha \pm \beta)$:

مثال: مقدار $\cos 75^\circ, \cos 15^\circ$ را به دو روش بیابید.

مثال: نشان دهید: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

مثال: مقدار $\cos 120^\circ$ را بیابید.

تذکر: چون $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ پس رابطه $\cos 2\alpha$ را به صورت های زیر نیز می توان نوشت:

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \end{cases}$$

تذکر: از دو رابطه اخیر دو رابطه پرکاربرد زیر بدست می آید (روابط طلایی):

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

مثال: مقدار $\sin 22.5^\circ$ و $\cos 22.5^\circ$ را بیابید.

تمرین کتاب

۱. نشان دهید: $\sin 3\alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha$

۲. نشان دهید: $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

۳. مقدار $\sin 67.5^\circ$, $\cos 67.5^\circ$ را بیابید.

حضرت امام علی (علیه السلام) فرموده‌اند: ((فضیلت درک و فهم مطالب علمی، به مراتب نافع‌تر از فضیلت تکرار و فواندن و فراگرفتن آن است))

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{چ) مناسبه نسبت‌های مثلثاتی } \tan(\alpha \pm \beta) :$$

مثال: مقدار $\tan 15^\circ$ ، $\tan 105^\circ$ را بیابید.

$$\tan^p \alpha = \frac{p \tan \alpha}{1 - \tan^p \alpha} \quad \text{مثال: نشان دهید:}$$

مثال: مقدار $\tan 120^\circ$ را بیابید.

تعبیر کتاب

۱- اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ، مقدارهای $\sin(\alpha + \beta)$ ، $\cos(\alpha - \beta)$ و $\tan(\alpha + \beta)$ را تعیین کنید.

$$p- \text{ نشان دهید: } \sin \alpha = p \sin \frac{\alpha}{p} \cos \frac{\alpha}{p}$$

۳- نمودار تابع $y = 3 - 6 \sin^2 x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. دوره تناوب این تابع چقدر است؟

۴- اگر α زاویه‌ای در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ باشد که $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \frac{\alpha}{4}$ را حساب کنید.

۵- درستی اتمادهای زیر را اثبات کنید.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin px = \frac{p \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos px = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$1 + \sin px = (\sin x + \cos x)^p$$

$$\cos^2 px = 2 \cos^2 x - 2 \cos^p x + 1$$

۶- آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی‌متر باشد و مساحت آن ۳ سانتی‌متر مربع شود؟ چند مثلث با این خاصیت موجودند و با چه روشی می‌توان آن‌ها را ساخت؟

۷- در مثلثی که طول اضلاع آن ۱، ۳، $\sqrt{7}$ است، زاویه مقابل ضلع به طول $\sqrt{7}$ را بیابید.

تبدیل جمع به ضرب در نسبت های مثلثاتی:

می‌توانیم با استفاده از فرمول‌های زیر نسبت به تبدیل جمع به ضرب نسبت های مثلثاتی اقدام نماییم:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

حضرت امام صادق (علیه السلام) فرموده‌اند: ((اگر از عمرت فقط دو روز باقی مانده باشد، یک روزش را به فرا گرفتن ادب و تربیت اختصاص بده تا روز مرگت از سرمایه‌های اقلای روز قبلت یاری بخوای))

مثال: اگر $\sin 2x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin 4x + \sin 2x$, $\cos 4x + \cos 2x$ را بیابید.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\frac{\sin 35^\circ + \cos 65^\circ}{\sin 50^\circ \sin 85^\circ}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ \cos 70^\circ}$$

$$\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$$

$$\cos 4x - \cos x$$

$$\cos 4x + \cos x$$

$$\sin 10^\circ - \sin 50^\circ - \sin 70^\circ$$

تبدیل ضرب به جمع در نسبت های مثلثاتی:

می توانیم با استفاده از فرمول های زیر نسبت به تبدیل ضرب به جمع نسبت های مثلثاتی اقدام نماییم:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

مثال: به جمع تبدیل کنید.

$$\sin 5x \cos 2x =$$

$$\cos 4x \cos 2x =$$

$$\sin 4x \sin 3x =$$

$$\sin x \cos 4x =$$

$$\cos 40^\circ \sin 10^\circ =$$

$$\sin 40^\circ \sin 80^\circ =$$

معادلات مثلثاتی:

برای حل معادلات مثلثاتی، ابتدا معادله را به ساده ترین شکل ممکن تبدیل می کنیم، به طوری که فقط در یک سمت یک نسبت مثلثاتی و در سمت دیگر یک عدد باشد. سپس زاویه مربوط به آن عدد را α در نظر می گیریم و در نهایت از روابط زیر مقدار x را می یابیم.

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha \quad \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته: برای درک قواعد بالا باید بدانیم هر نسبت مثلثاتی در دو نامیه مثبت و در دو نامیه منفی می باشد و دیگر اینکه جواب های معادلات مثلثاتی تنها محدود به زاویه های کمتر از 360° نمی شود، لذا از مقدار $k\pi$ برای جواب های کلی معادلات مثلثاتی استفاده می شود.

نکته: برای یافتن جواب‌های معادله در یک ممدوده خاص، کافیتست به جای k مقدارهای صمیح قرار دهیم.

مثال: معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$۱- \psi \sin^p x - \sin x = ۰$$

$$۲- \cos^p x + \cos x - \psi = ۰$$

$$۳- \tan^p x - ۱ = ۰$$

$$۴- \sin x + \sin \psi x + \sin \psi^2 x = ۰$$

$$۴- \cos x + \cos \psi x + \cos \psi^2 x = ۰$$

تعریف کتاب

۱- معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$الف- \sin \psi x = \sin \psi^2 x$$

$$ب- \cos x = \cos \psi x$$

$$پ- \tan x = \tan \psi x$$

$$ت- \sin x + \cos x = ۱$$

ث- $\sin x - \cos x = 1$

ع- $\cos t (\sqrt{2} \cos t - 9) = 5$

۲- معادلات زیر را حل کرده و جواب‌هایی که در بازه $[-\pi, \pi]$ هستند را بیابید.

الف) $\sin 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$

ب) $\tan x \tan 2x = 1$

ج) $\sqrt{2} \sin^3 t + \sqrt{2} \sin t - 1 = 0$

د) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

۳- مثلثی رسم کرده‌ایم که طول اضلاع آن ۲ و $\sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{3}$ است. زاویه‌های این مثلث را به دست آورید.

تمرین کتاب

۱- اگر θ زاویه حاده‌ای باشد که $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، کلیه جواب‌های معادله $6 \cos x + 8 \sin x = 5$ را بر حسب θ به دست آورید و آن جواب‌هایی که در بازه $2\pi < x < \pi$ می‌باشند را تعیین کنید.

۲- کلیه جواب‌های معادله $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$ را تعیین کنید.

۳- کلیه جواب‌های معادله $\tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ را تعیین کنید.

وارون توابع مثلثاتی:

وارون سینوس: وارون تابع مثلثاتی سینوس را به صورت $y = \text{Sin}^{-1}x$ نشان

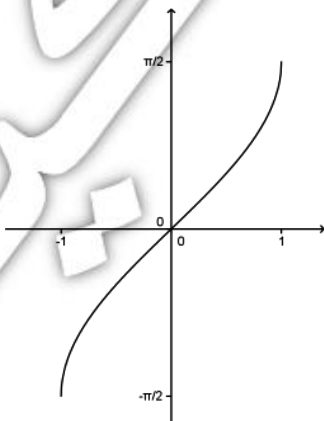
می‌دهیم. نمودار این تابع به شکل زیر می‌باشد:

دامنه و برد این تابع با توجه به شکل بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} D_f = [-1, +1] \\ R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

یعنی ورودی این تابع عدد و خروجی آن زاویه می‌باشد: $\text{sin}^{-1}a = \alpha$

نکته: در حالت کلی $\text{sin}(\text{sin}^{-1}x) = x$ یک اتماد می‌باشد (چون $x \in [-1, +1]$ است)، اما $\text{sin}^{-1}(\text{sin} \alpha) = \alpha$ یک اتماد کلی نمی‌باشد.



((حضرت امام علی (علیه السلام) فرموده اند: علم مایه ی زندگی و میات است و ایمان باعث رستگاری و نجات.))

مثال: حاصل عبارات مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\sin^{-1} \frac{1}{p} = \quad , \sin^{-1} 1 = \quad , \sin^{-1} \frac{\sqrt{p}}{p} = \quad , \sin \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{p}}{p} \right) =$$

$$\sin^{-1} \left(\sin \frac{3\pi}{4} \right) = \quad , \sin^{-1} \left(\sin \frac{5\pi}{4} \right) =$$

$$\sin \left(\sin^{-1} \frac{3}{4} \right) =$$

$$\cos \left(\sin^{-1} \frac{3}{5} \right) =$$

تعرین کتاب

مقدارهای زیر را مناسبه کنید.

$$\sin^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{4}{5} \right) =$$

$$\sin^{-1} \left(\sin \frac{5\pi}{14} \right) =$$

$$\sin^{-1} \left(\cos \frac{\pi}{12} \right) =$$

وارون کسینوس: وارون تابع مثلثاتی کسینوس را به صوت: $y = \text{Cos}^{-1}x$

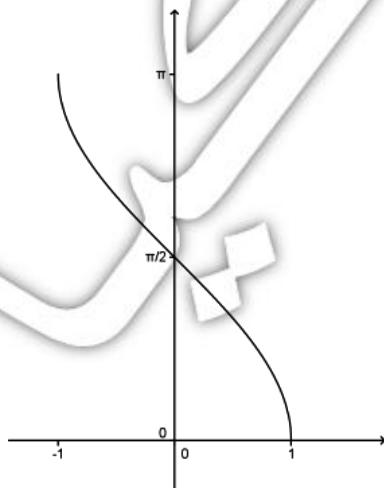
نشان می دهیم که نمودار آن به شکل زیر می باشد:

دامنه و برد این تابع با توجه به شکل بصورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} D_f = [-1, +1] \\ R_f = [0, \pi] \end{cases}$$

یعنی ورودی این تابع نیز عدد و فزویی آن زاویه می باشد:

$$\cos^{-1}a = \alpha$$



نکته: در حالت کلی $\cos(\cos^{-1}x) = x$ یک اتماد می باشد (چون $x \in [-1, +1]$ است)، اما $\cos^{-1}(\cos \alpha) = \alpha$ یک اتماد کلی نمی باشد.

مثال: حاصل عبارات مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\cos^{-1} 1 = \quad , \cos^{-1} \frac{1}{5} = \quad , \cos^{-1}(-1) = \quad , \cos^{-1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) =$$

$$\cos(\sin^{-1} \frac{3}{5}) =$$

$$\sin(\cos^{-1} \frac{1}{4}) =$$

$$\cos^{-1} \left(\cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right) \right) =$$

تعریف کتاب

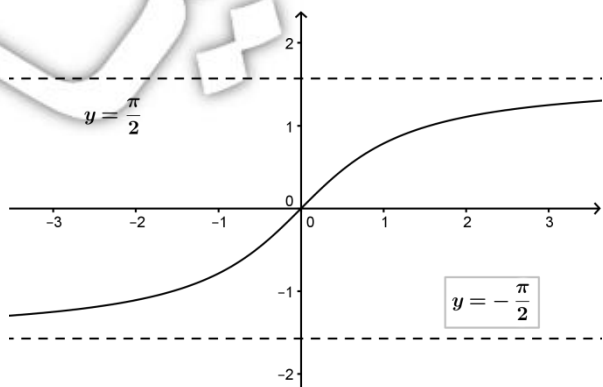
۱. مقدرهای زیر را مناسبه کنید.

$$\sin^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) + \cos^{-1} \left(\frac{3}{5} \right) =$$

$$\cos^{-1} \left(\cos \frac{5\pi}{4} \right) =$$

$$\cos^{-1} \left(\sin \frac{\pi}{8} \right) =$$

۲. در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است، زاویه بین این دو ضلع تابعی از طول ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید. دامنه و برد این تابع چیست؟



وارون تانژانت: وارون تابع مثلثاتی تانژانت را به صوت: $y = \tan^{-1}x$ نشان می دهیم که نمودار آن به شکل زیر می باشد: دامنه و برد این تابع با توجه به شکل بصورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\tan^{-1} a = \alpha$$

یعنی ورودی این تابع نیز عدد و خروجی آن زاویه می باشد:

نکته: در حالت کلی $\tan(\tan^{-1} x) = x$ یک اتماد می باشد (چون $x \in [-1, +1]$ است)، اما $\tan^{-1}(\tan x) = x$ یک اتماد کلی نمی باشد.

مثال: حاصل عبارات مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\tan^{-1} 1 = \quad , \tan^{-1} \sqrt{3} = \quad , \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \quad , \tan \left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$\tan^{-1} \left(\tan \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\tan^{-1} \left(\tan \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$\tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{3}\right) =$$

$$\tan \left(\sin^{-1} \frac{1}{5}\right) =$$

$$\cos \left(\tan^{-1} \frac{3}{4}\right) =$$

تعریف کتاب

۱. مقدارهای زیر را مناسبه کنید.

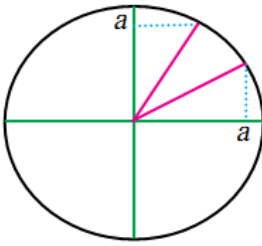
$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$$

$$\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$\tan^{-1} \left(\tan \frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$\sin^{-1} \left(\tan \frac{\pi}{8}\right) =$$

۲. راجع به وضعیت وارون پذیری و نیز تابع وارون $y = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ بحث کنید.



۳. برای هر $0 < a < 1$ از طریق شکل زیر نشان دهید: $\sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$

۴. از طریق دایره مثلثاتی برای هر $-1 \leq x \leq 1$ نشان دهید: $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

۵. از طریق دایره مثلثاتی برای هر $-1 \leq x \leq 1$ نشان دهید: $\sin(\cos^{-1} x) = \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$

۶. برای هر x نشان دهید: $\sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

۷. در مورد زوج یا فرد بودن توابع $\tan^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$ چه می‌توان گفت؟

۸. برای هر عدد مثبت x نشان دهید $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ زاویه‌ای در بازه $(0, \pi)$ است و با محاسبه سینوس یا کسینوس این زاویه نتیجه بگیرید:

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

حضرت امام علی (علیه السلام): ((کسی که در اندیشه ی گناه باشد و پیرامون آن بسیار فکر کند سرانجام همان افکار بد و اندیشه های پلید، او را به ارتکاب گناه می فواند و آلوده اش می سازد))

سوالات امتحانات نهایی

فرداد ۹۴

۱	α زاویه ای حاده و β زاویه ای منفرجه است و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را محاسبه کنید.	۹
۱/۲۵	معادله $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	۱۰
۱/۷۵	مقدار $\tan^{-1}\left(\tan \frac{4\pi}{3}\right)$ را حساب کنید.	۱۱

شهریور ۹۴

۱	نشان دهید برای هر زاویه α داریم: $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	۹
۱	معادله $\sin^2 x = \cos^2 x + 1$ را حل کنید.	۱۰
۱	حاصل $\sin^{-1}\left(\cos \frac{2\pi}{9}\right)$ را به دست آورید.	۱۱

فرداد ۹۳

۰/۷۵	عبارت $\sin(x+h) - \sin x$ را به حاصل ضرب تبدیل کنید.	۹
۱/۵	معادله $2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$ را حل کنید.	۱۰
۰/۷۵	مقدار $\sin^{-1}(\sin(\frac{5\pi}{4}))$ را حساب کنید.	۱۱

شهریور ۹۳

۰/۷۵	مقدار کسینوس زاویه 15° را حساب کنید.	۹
۱/۵	معادله $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید.	۱۰
۰/۷۵	حاصل $\cos^{-1}(\sin(\frac{\pi}{8}))$ را بنویسید.	۱۱

دی ۹۳

۱	مقدار تنازات زاویه 105° را حساب کنید.	۹
۱/۵	معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کرده و جواب هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ هستند را تعیین کنید.	۱۰
۰/۵	مقدار $\cos^{-1}(-\frac{1}{4})$ را حساب کنید.	۱۱

فرداد ۹۲

۱	درستی اتحاد زیر را ثابت کنید. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$	۸
۱/۲۵	کلیه ی جواب های معادله ی مثلثاتی $\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$ را تعیین کنید.	۹
۰/۷۵	مقدار $\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))$ را حساب کنید.	۱۰

شهریور ۹۲

۱	مقدار $\sin 75^\circ$ را به دست آورید.	۸
۱/۲۵	معادله ی مثلثاتی زیر را حل کنید. $\sin x - \cos x = 1$	۹
۰/۷۵	مقدار $\sin^{-1}(\tan \frac{\pi}{4})$ را بیابید.	۱۰

دی ۹۲

۰/۷۵	نشان دهید برای هر زاویه ی α داریم: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$.	۸
۱/۲۵	معادله ی مثلثاتی $\sin 5x = \sin 2x$ را حل کنید.	۹
۱	مقدار $\sin^{-1}(\sin \frac{4\pi}{3})$ را حساب کنید.	۱۰

فرداد ۹۱

۱	سینوس زاویه ی $22/5^\circ$ را حساب کنید.	۸
۱/۲۵	کلیه ی جواب های معادله ی $2\cos^2 x - \cos x = 0$ را تعیین کنید.	۹
۰/۲۵	مقدار $(\tan^{-1} \frac{3}{4})$ را حساب کنید.	۱۰

شهریور ۹۱

۱/۲۵	درستی اتحاد زیر را ثابت کنید. $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	۸
۱	معادله ی مثلثاتی زیر را حل کنید. $2\sin x - \sqrt{2} = 0$	۹
۰/۲۵	مقدار $(\sin^{-1} (\sin \frac{4\pi}{3}))$ را حساب کنید.	۱۰

دی ۹۱

۸	فرمول $\sin 2\alpha$ را از فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ به دست آورید.
۹	کلیه ی جواب های معادله ی مثلثاتی $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$ را تعیین کنید.
۱۰	مقدار $(\cos \frac{\pi}{3})^{-1} \sin^{-1}$ را حساب کنید.

فصل چهارم: حد توابع و پیوستگی

حد توابع:

حد چپ توابع: برای درک بهتر مفهوم حد چپ توابع ابتدا جدول زیر را برای تابع $f(x) = 2x + 1$ کامل می‌کنیم:

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	...	۱
$f(x) = 2x + 1$...	

با توجه به جدول مشخص می‌شود که با نزدیک شدن x به عدد ۱ از سمت مقادیر کمتر از ۱ و نزدیک به آن مقدار تابع به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

و می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) =$

تعریف: اگر در تابع f با نزدیک شدن x به a از سمت مقدار های کمتر از آن و نزدیک به آن مقدار f به عددی مانند l نزدیک شود، می‌گوییم

حد چپ تابع در نقطه $x = a$ برابر l می‌باشد. و می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

حد راست توابع: برای درک بهتر مفهوم حد راست توابع نیز ابتدا جدول زیر را برای تابع $f(x) = 2x + 1$ کامل کنیم:

x	۱	...	۱/۰۰۱	۱/۱	۱/۵	۲
$f(x) = 2x + 1$...				

با توجه به جدول مشخص می‌شود که با نزدیک شدن x به عدد ۱ از سمت مقادیر بیشتر از ۱ و نزدیک به آن مقدار تابع به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

و می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) =$

تعریف: اگر در تابع f با نزدیک شدن x به a از سمت مقدار های بیشتر از آن و نزدیک به آن مقدار f به عددی مانند l نزدیک شود،

می‌گوییم حد راست تابع در نقطه $x = a$ برابر l می‌باشد. و می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

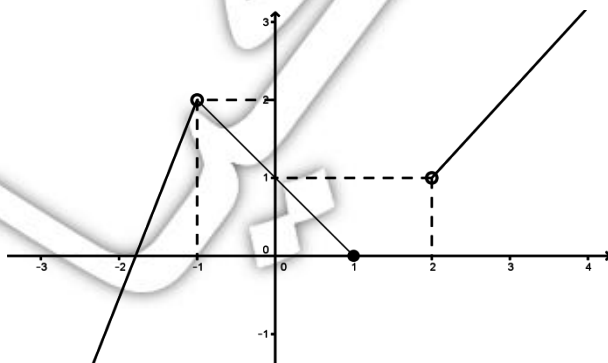
تعریف: تابع f در نقطه $x = a$ حد دارد هرگاه حد راست و چپ تابع در نقطه مذکور موجود و برابر یکدیگر باشد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

تذکره: اگر حد تابع فقط از طرف راست موجود باشد، می‌گوییم حد تابع با مد طرف راست برابر است و اگر حد تابع فقط از طرف چپ موجود باشد،

می‌گوییم حد تابع با مد طرف چپ برابر است.

مثال: با توجه به شکل موارد فواسته شده را بیابید.



$$f(-1) = \quad , f(0) = \quad , f(1) = \quad , f(2) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \quad$$

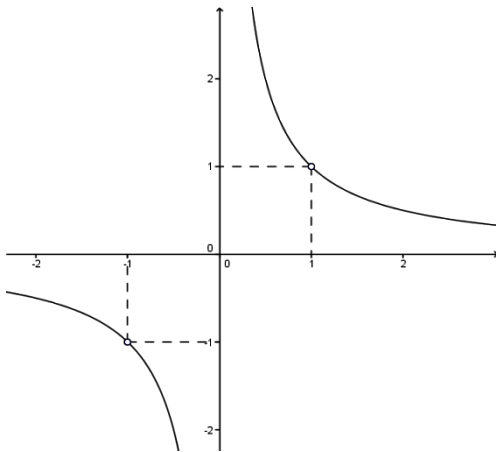
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \quad , \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \quad$$

حضرت رسول اکرم (صلی الله علیه و آله و سلم) : (در گروه مومنان، کاملترین فرد از جهت ایمان آن کسی است که افلاکش از دیگران بهتر است و نسبت به خانواده‌ی خود بیشتر مهر و مدارا کند))

مثال: با توجه به شکل موارد فواسته شده را بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{does not exist}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{does not exist}$$

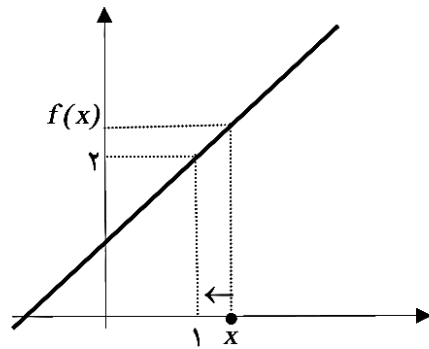
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{does not exist}$$

تعرین کتاب

۱- برای تابع $f(x) = x + 1$ جدول زیر را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که اگر مقدارهای x را به ۱ نزدیک کنیم مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow 1$	$\leftarrow 1$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$				$\rightarrow ?$	\leftarrow			

۲- نمودار تابع $f(x) = x + 1$ در زیر رسم شده است. از روی نمودار توضیح دهید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.



۳- برای توابع $k(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $g(x)$ و $k(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.

۴- سه تابع $f(x)$ و $g(x)$ و $k(x)$ با هم مساوی نیستند. این سه تابع چه تفاوت‌ها و چه شباهت‌هایی دارند و چه چیز باعث شده است که همه آن‌ها با نزدیک شدن x به ۱ به عدد یکسانی نزدیک شوند؟

شش رزم موفقیت از دیدگاه امیرالمومنین حضرت علی (علیه السلام):

۵- جدول صفحه بعد را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که وقتی مقدار x به صفر نزدیک می‌شود مقدار تابع

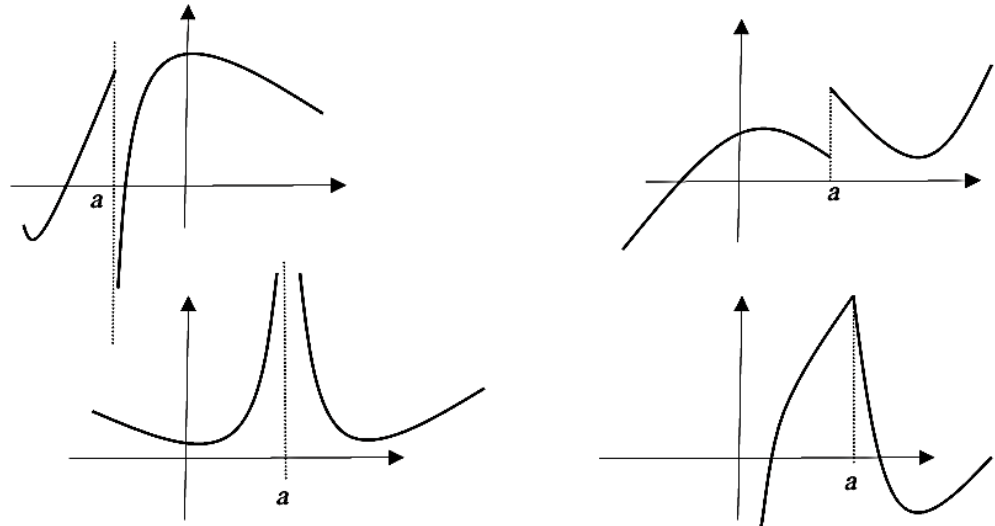
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

به چه عددی نزدیک می‌شود؟

x	-0.1 -0.01 -0.001 $\rightarrow 0$ $\leftarrow 0.001$ 0.01 0.1
$\sin x$	0.00099999 0.0099999 0.09983
$\frac{\sin x}{x}$	$\rightarrow ? \leftarrow$

تمرین کتاب

۱- در زیر نمودار چند تابع داده شده است. در هر کدام از نمودارهای داده شده در نقطه مشخص شده وجود حدهای چپ و راست و وجود حد تابع را بررسی کنید.



۲- با رسم جدول و نمودار توابع زیر وجود حدهای چپ و راست و حد تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید و مقدار این حدها را به دست آورید.

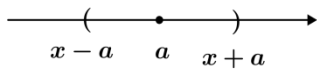
الف) $a=3, y=\sqrt{1+x}$

ب) $a=0, y=\frac{x}{|x|}$

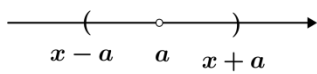
ج) $a=2, y=\begin{cases} x^2-1 & x < 2 \\ x+1 & 2 < x \end{cases}$

۱. داشتن هدف: ((کسی که به کارهای مختلف بپردازد، نقشه‌ها [و پیش‌بینی‌هایش] به جایی نمی‌رسد))

همسایگی یک نقطه:

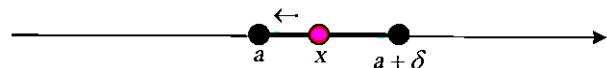
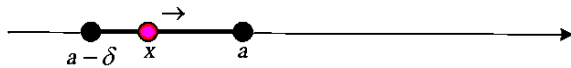


هر بازه به صورت $(a - \alpha, a + \alpha)$ را که در آن a یک عدد حقیقی و α یک مقیاس مثبت است را یک همسایگی متقارن برای نقطه می‌نامیم:



اگر در تعریف بالا نقطه a را از بازه حذف کنیم، آن‌گاه این بازه را یک همسایگی متقارن ممذوف a می‌نامیم. یعنی: $(a - \alpha, a + \alpha) - \{a\}$

تذکره: به بازه ای نظیر $(a, a + \alpha)$ یک همسایگی راست و به بازه ای نظیر $(a - \alpha, a)$ یک همسایگی چپ نقطه a می‌گوییم.



مثال: بازه $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{1000})$ یک همسایگی متقارن برای عدد ۳، بازه $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{1000})$ یک همسایگی راست و بازه $(\frac{3}{2} - \frac{1}{1000}, \frac{3}{2})$ یک همسایگی چپ برای آن می‌باشد. همچنین بازه $\{3\} - (\frac{3}{2} - \frac{1}{1000}, \frac{3}{2} + \frac{1}{1000})$ یک همسایگی ممذوف برای ۳ می‌باشد.

تعریف کتاب

برای تابع $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-[x]}$ به سؤالات زیر جواب دهید.

- ۱- این تابع در همسایگی کدام نقاط تعریف شده است؟
- ۲- این تابع در همسایگی ممذوف کدام نقاط تعریف شده است که در خود آن نقاط تعریف نشده است؟
- ۳- این تابع در یک همسایگی چپ کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی راست آن نقاط تعریف نشده است؟
- ۴- این تابع در یک همسایگی راست کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی چپ آن نقاط تعریف نشده است؟

تعریف کتاب

۱- با رسم جدول مقدارهای توابع زیر در اطراف نقطه داده شده (در صورت لزوم از ماشین حساب استفاده کنید) بررسی کنید که آیا حد این توابع در آن نقطه موجود است؟ در صورت وجود مقدار حد را تعیین کنید و به زبان ریاضی بنویسید.

$$a = -1, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ x^3 + 3 & -1 < x \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad a = 0, y = \frac{x^2 - x}{x} \quad (\text{الف})$$

$$a = 0, y = \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{د}) \quad a = 2, y = x[x] \quad (\text{ج})$$

$$a = 0, y = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (\text{و}) \quad a = 1, y = \frac{\sqrt{|x(x-1)|}}{x^2 - 1} \quad (\text{ه})$$

۲- با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه داده شده وجود حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط بررسی کنید.

$$a = 2, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2 + 9 & 2 < x \end{cases} \quad \text{الف) } a = 1/2, y = [x] \quad \text{ب) } a = 2, y = x - [x]$$

$$\text{ج) } a = 2, y = x - [x] \quad \text{د) } a = -3, y = 1 - \sqrt{1-x}$$

$$\text{ه) } a = 0, y = \frac{x}{|x|}$$

۳- اگر دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بر هم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد آن‌ها در نقطه a مانند یکدیگر است، یعنی اگر یکی از آن‌ها در a حد داشته باشد، دیگری هم حد دارد و حد آن‌ها مساوی است. همچنین اگر دو تابع f و g در یک همسایگی چپ (یا راست) نقطه‌ای بر هم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد چپ (راست) این دو تابع در این نقطه مانند یکدیگر است.

۴- در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد.

الف) تابع در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

ب) تابع در ۱ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

ج) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در

صفر باشد.

د) تابع در یک همسایگی ۱- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱- باشد.

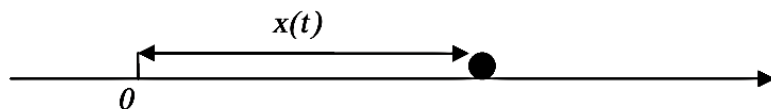
ه) تابع در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

و) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

ز) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته باشد.

۵- متحرکی روی محور x ها به گونه‌ای حرکت می‌کند که در هر لحظه t ($0 \leq t$) در مکان $x(t)$ قرار دارد و

$$x(t) = t^2 - t$$



با رسم نمودار این تابع در دامنه داده شده چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید و سرعت لحظه‌ای آن را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.

قضایای حد توابع:

اگر توابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند آن‌گاه توابع: $f + g$ و $f \times g$ در نقطه $x = a$ دارای حد می‌باشد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

و همچنین اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L^n, \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} (L > 0 \vee n = 2k + 1), \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L} (L \neq 0)$$

اگر f یک تابع چندجمله‌ای باشد داریم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

نکته: با استفاده از قضایای فوق می‌توان به ما مسایل مدی پرداخت و یا برقی از مسایل را به شکل ساده‌تری حل نمود.

مثال: حاصل مدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) \left(\frac{1}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1)^3 =$$

تمرین کتاب

۱- با استقرا ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

۲- ثابت کنید برای هر تابع چندجمله‌ای مانند $P(x)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

تمرین کتاب

۱- حد توابع زیر را در نقطه داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) $y = \cos^2 x + x^2$ در π (ب) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$ در ۴

ج) $y = \frac{x \sin x}{(1+x) \cos x}$ در π (د) $y = 2^{x+1} - 3^{2x}$ در ۲

۲- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دامنه یکسانی داشته باشند و در a حد داشته باشند، نشان دهید تابع $f(x) - g(x)$ نیز

در a حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

۳- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دامنه یکسانی داشته باشند و در a حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ نشان دهید تابع

نیز در a حد دارد و $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

نکته: به عدد ۰ صفر مطلق و به نمادهای 0^+ ، 0^- ، صفرهای مدی می‌گوییم.

نکته: در مواقعی نظیر $0/0$ ، $0/0^+$ ، $0^- \times \infty$ ، $0^+ \times \infty$ ، $\infty - \infty$ ، که عبارت معنی فاصی ندارد، ابهام گفته می‌شود.

مماسبه مد

برای مماسبه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، بعد از مماسبه $f(a)$ دو حالت به وجود می‌آید که عبارتند از:

الف) ابهام وجود ندارد: در این حالت برای مماسبه مد تابع کافیسست $f(a)$ را مماسبه کنیم.

مثال: مدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^p \sin \sqrt{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^p - \sqrt{x+1}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{p}} x(\sin x + \cos x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{1-4x}} \frac{\sqrt{1-4x}}{x} =$$

مثال: مقدار a را چنان بیابید که تابع در نقطه مورد نظر مد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^p - 4ax + p} & x \geq 1 \\ x - \sqrt{a} & x < 1 \end{cases}, x = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x \leq p \\ a \sin(x - p) + bx & x > p \end{cases}, x = p$$

ب) ابهام وجود دارد:

۱) مماسبه مد در توابع کسری: با استفاده از تجزیه صورت و مخرج و یا با استفاده از اتمادهای مثلثاتی عامل ابهام را از بین می‌بریم.

مثال: حاصل مدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^p - 1}{x^p + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p + px - p}{x^p - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -p^-} \frac{x^p + px + p}{|x + p|} =$$

$x^p + px - p$				
$x - 1$				

۲. داشتن همت: (افکر تو وسعتی که همه امور را فرا بگیرد ندارد، پس آن را برای امور مهم فارغ بگذار)

۲) مماسبه مد در توابع کسری (ادیکالی): در این نوع مدها صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب می‌کنیم تا سوال به شکل قسمت قبل در آید.

مثال: ماصل مدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\sqrt{1+x^p} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^p - 16}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t+h} - \sqrt{t}}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^p + 3x}$$

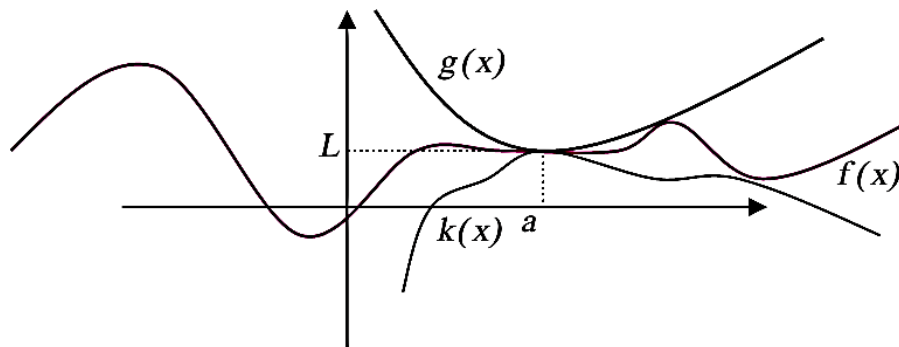
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

۳) مماسبه مد با استفاده از قضیه فشردگی:

قضیه فشردگی: اگر تابع f در یک همسایگی ممذوف نقطه ای مانند a بین دو تابع g و h قرار بگیرد و داشته باشیم $h(a) = g(a) = L$ ، در این صورت خواهیم داشت: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.



با استفاده از این نکته برخی از مدهای دارای ابهام قابل حل خواهند بود.

مثال: ماصل مدهای مقابل را بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

مثال: اگر به ازای هر x داشته باشیم $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ حد تابع $g(x)$ را در $x = 0$ تعیین کنید.

۳. داشتن دوست فوب: ((کسی که فود را از تجربه ها بی نیاز بداند، سرانجام [امور] را نخواهد دید.))

مثال: اگر به ازای هر $x \in (-\pi, \pi)$ داشته باشیم: $\tan(\frac{x}{4}) \leq f(x) \leq 4 - \cos^2 x$ ، حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ را به دست آورید.

۱۴) مماسبه مد با استفاده از هم (ری):

با استفاده از قضیه فشردگی نتیجه می شود: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و همچنین: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$. یا به عبارتی در همسایگی صفر برای نسبت مثلثاتی سینوس و تانژانت داریم: $\sin x \approx x$, $\tan x \approx x$.

مثال: حاصل مدهای مقابل را بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos px}{x^p}$

۲) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{px - \frac{\pi}{p}}$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^p + x \tan x}{\sin^p x}$

۴) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px \tan px}{x^p}$

۵) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin \Delta x}{\sqrt{1 - \cos \Delta x}}$

۶) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin px}$

۱۵) مماسبه مد بینهایت:

ابتدا باید بدانیم به عبارتهای 0^+ و 0^- صفرهای مدی می‌گوییم و از لحاظ قدر مطلق اعدادی بسیار کوچک و نزدیک به صفر هستند. داریم:

$$\begin{cases} \frac{a}{0^+} = +\infty & a > 0 \\ \frac{a}{0^+} = -\infty & a < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{0^-} = -\infty & a > 0 \\ \frac{a}{0^-} = +\infty & a < 0 \end{cases} \quad \frac{0}{0^+} = \frac{0}{0^-} = 0$$

مثال: حاصل مدهای مقابل را بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x^p}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{p - x}{x - 0}$

۴) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$

۵) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{x - 1}{(x - p)^p}$

۶) $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{[x - p]}{x^p - q}$

۴. استفاده از تجربه‌ها: ((کسی که در رأی فویش مستبد باشد، هلاک می‌شود و کسی که با مردان مشورت نماید، در عقولهای آنان شریک فواید شد.

۶) مماسبه مد در بینهایت:

ابتدا باید بدانیم در مورد عددهای فیلی بزرگ تفاوت اعداد x و x^p و همچنین توان‌های بیشتر، به قدری زیاد است که از مقدار x و هم‌هی توان‌های کمتر از بیشترین توان عبارت، صرف نظر می‌شود. از این موضوع برای مل این نوع مدود استفاده می‌شود.

مثال: حاصل مدهای مقابل را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p - 4}{3x^p + x}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^p + 4x}}{2x + 9}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x + 4|}{x - 5}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + \sqrt{4x^p - 1}}{7x + |3 - x|}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{x^p + 4x}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^p + 2x} - x$$

۶) مماسبه مدهای یک طرفه:

تذکره: زمانی از مد دو طرفه تابع در نقطه a می‌توانیم صحبت کنیم که تابع مورد نظر در یک همسایگی ممذوف نقطه a تعریف شده باشد.

تذکر مهم: اگر تابعی فقط در همسایگی راست (چپ) یک نقطه تعریف شده باشد، منظور از مد تابع همان مد (راست/چپ) تابع می‌باشد.

$$\text{یعنی: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

همانطور که اول فصل اشاره شد، برای مماسبه مد در نقاط مرزی مسایلی که بازه‌ای از اعداد حقیقی جزء دامنه آن‌ها نمی‌باشد، ابتدا باید به مماسبه دامنه بپردازیم. بعد از یافتن دامنه، مد تابع در نقطه مورد نظر برابر مد یک طرفه از سمتی که تابع تعریف می‌شود است.

مثال: حاصل مدهای مقابل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}} \sqrt{px - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{x + 1}{[x] - p}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 - x}}{[x] + 1}$$

تعرین کتاب

۱- حدهای زیر را حساب کنید.

$$ب) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$الف) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$د) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1}$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1} \quad \text{ه}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{ح}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{ز}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} \quad \text{ط}$$

- ۲- ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ معادل با آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$.
- ۳- با توجه به ایده شهودی حد تابع توضیح دهید که چرا دو شرط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ با یکدیگر معادلند.
- ۴- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه a تعریف شده‌اند و f در a حد دارد ولی g در a حد ندارد، نشان دهید $f+g$ در a حد ندارد.
- ۵- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ کدام در صفر حد ندارند ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

۲- ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ معادل با آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$.

۳- با توجه به ایده شهودی حد تابع توضیح دهید که چرا دو شرط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ با یکدیگر معادلند.

۴- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه a تعریف شده‌اند و f در a حد دارد ولی g در a حد ندارد، نشان دهید $f+g$ در a حد ندارد.

۵- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ‌کدام در صفر حد ندارند ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

پیوستگی توابع:

می‌گوییم تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است هرگاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

مثال: پیوستگی توابع زیر را در نقاط خواسته شده تعیین کنید.

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x > 3 \\ x^2 + x - 2 & x \leq 3 \end{cases}, x = 3$$

$$2) f(x) = \sqrt{x - 3}, x = 3$$

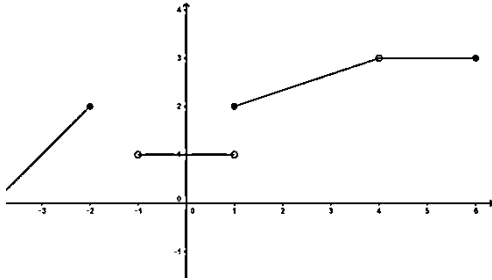
$$3) f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x > 0 \\ x + x^2 & x \leq 0 \end{cases}, x = 0$$

$$4) f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x = 2$$

۵. مشورت: ((کسی که از افکار دیگران استقبال کند، موارد فطرا می شناسد))

مثال: مقدار a و b را طوری بیابید که تابع f را در نقطه $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x < ۲ \\ -۲ & x = ۲ \\ a \sin(x - ۲) + bx & x > ۲ \end{cases}$$



مثال: با توجه به شکل تابع f در چه نقاطی ناپیوسته است؟ چرا؟

تعریف کتاب

با رسم نمودار توابع زیر، پیوستگی آن‌ها را در نقطه داده شده بررسی کنید.

۱- $y = \frac{1}{x}$ در نقطه دلخواه $a \neq 0$

۲- $y = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 0 \\ x^2 - x & 0 < x \end{cases}$ در نقطه $a = 0$

۳- $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq -1 \\ x+1 & -1 < x \end{cases}$ در نقطه $a = -1$

۴- $y = [x] - ۱$ با دامنه $[-1, 1]$ در نقطه $a = -1$

۶. نظم و برنامه‌ریزی: (آفرین و صایای حضرت علی(ع): شما و همه فرزندانم و هر کس که نامهام به او می‌رسد را به ترس از خدا و نظم در کارهایتان سفارش می‌کنم.)

تعریف: تابع f پیوسته است، اگر در تمام نقاط دامنه اش پیوسته باشد. مثلاً تابع چندجمله‌ای $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$ یک تابع پیوسته است زیرا در تمام دامنه اش یعنی \mathbb{R} ، پیوسته می‌باشد.

تذکره: اگر تابع g در نقطه a و تابع f در نقطه $g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $f \circ g$ در نقطه a پیوسته است. و می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 - \sin x$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (f \circ g)(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (f \circ g)(x) =$$

مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی ممذوف عدد ۲ تعریف شده باشد ولی حد نداشته باشد.

مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی عدد (-۱) حد داشته باشد ولی در این نقطه تعریف نشده باشد.

تعرین کتاب

۱- با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید کدام یک از آن‌ها ناپیوستگی دارند و در چه نقاطی ناپیوسته‌اند؟

(ب) $y = x + [x]$

(الف) $y = |x - 1| + 2$

(د) $y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & 1 < x \end{cases}$

(ج) $y = x + |x|$

۲- در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.

$$y = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x \leq 1 \\ x - 2a & 1 < x \end{cases}$$

۳- ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر پیوسته نخواهد بود.

$$y = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

۴- نمودار یک تابع را رسم کنید که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

۵- نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه صفر و ۱ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

۶- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوسته‌ای با دامنه یکسان باشند، نشان دهید توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز پیوسته‌اند. در مورد پیوستگی $\frac{f(x)}{g(x)}$ چه می‌توان گفت؟

۷- اگر f و g توابع پیوسته‌ای با دامنه IR باشند در مورد پیوستگی تابع $g \circ f$ چه می‌توان گفت؟

سوالات امتحان نهایی

فرداد ۹۴

۰/۷۵	نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ی ۲- تعریف شده باشد. در این نقطه حد داشته ولی حد آن غیر از مقدار تابع در عدد ۲- باشد.	۱۲
۱/۷۵	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\frac{x}{2}}$	۱۳
۱/۵	مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x-1}{[x] + a} & x \geq 1 \end{cases}$	۱۴

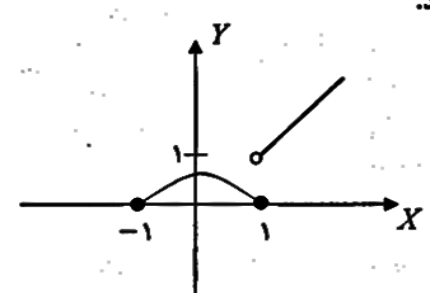
شهریور ۹۴

۱	حد راست و چپ تابع $f(x) = x - [x]$ را در $x = 2$ محاسبه کنید.	۱۲
۱/۷۵	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 6x + 5}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{x^2}$	۱۳
۱/۲۵	پیوستگی تابع زیر در $a = 1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & x > 1 \\ \frac{x-1}{x-\frac{1}{2}} & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$	۱۴

فرداد ۹۳

۰/۷۵	ایا تابع $f(x) = x - [x]$ در $x = 1$ حد دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.	۱۲
۲	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2x - 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{2x^2}$	۱۳
۱/۲۵	ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، پیوستگی تابع را در $a = 0$ بررسی کنید.	۱۴

شهریور ۹۳

۱	<p>با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.</p>  <p>الف) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ج) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ د) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$</p>	۱۲
۲	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \times \tan\left(\frac{\pi}{8}x\right)$</p>	۱۳
۱	<p>در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 2 \\ x - 2 & x = 2 \\ ax + 1 & x \geq 2 \end{cases}$	۱۴

دی ۹۳

۱/۲۰	با تکمیل جدول زیر، مقدار حد تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ به دست آورید.	۱۲																
	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$0/99$</td> <td>$0/999$</td> <td>\rightarrow</td> <td>1</td> <td>\leftarrow</td> <td>$1/001$</td> <td>$1/01$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>\rightarrow</td> <td>$?$</td> <td>\leftarrow</td> <td></td> </tr> </table>	x	$0/99$	$0/999$	\rightarrow	1	\leftarrow	$1/001$	$1/01$	$f(x)$				\rightarrow	$?$	\leftarrow		
x	$0/99$	$0/999$	\rightarrow	1	\leftarrow	$1/001$	$1/01$											
$f(x)$				\rightarrow	$?$	\leftarrow												
۱/۲۰	حدود توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	۱۳																
	الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+2x}$	ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$																
۱	پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $a=1$ بررسی کنید.	۱۴																
	$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \neq 1 \\ x-1 & x = 1 \end{cases}$																	

فرداد ۹۲

۲	حد توابع زیر را محاسبه کنید:	۱۱
	الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$	ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{2x^2}$
۱	حد تابع $y = \frac{1}{[x]-3}$ را در $x=3$ در صورت وجود، بیابید.	۱۲
۱	پیوستگی تابع زیر را در $x=-1$ بررسی کنید.	۱۳
	$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & x < -1 \end{cases}$	

شهریور ۹۲

۱	نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی -2 تعریف شده باشد و در این نقطه، حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در -2 باشد.	۱۱
۲	حد توابع زیر را محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$	۱۲
۱	در تابع زیر، مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد. $y = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x \leq 1 \\ x - 2a & x > 1 \end{cases}$	۱۳

دی ۹۲

۱	با رسم نمودار $y = \sqrt{x-2} + 1$ مقدار حد را در اطراف نقطه‌ی $a = 2$ بررسی کنید.	۱۱
۲	حد توابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{x^2}$	۱۲
۱	پیوستگی تابع زیر را در $x = 1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} 4 - 3x & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$	۱۳

فرداد ۹۱

۲/۲۵	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید:</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-[x])$ ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$</p>	۱۱
۱	<p>مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته شود.</p> $f(x) = \begin{cases} a - x-1 & x \geq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$	۱۲
۰/۷۵	<p>نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست $\underline{2}$ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ $\underline{2}$ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.</p>	۱۳

شهریور ۹۱

۱/۲۵	<p>با رسم نمودار تابع زیر در اطراف نقطه $x_0 = 1$ داده شده، وجود حد و حد راست و حد چپ را در نقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} x-2 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$	۱۱
۲	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید:</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1-\cos 2x}$</p>	۱۲
۰/۷۵	<p>پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.</p>	۱۳

دی ۹۱

۲/۲۵	حد توابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-2}}{x^2 - 4}$	۱۱
۰/۷۵	حد تابع $y = \sqrt{2-x}$ را در $x = 2$ در صورت وجود، بیابید.	۱۲
۱	پیوستگی تابع زیر را در $x = 2$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x - 7 & x < 2 \end{cases}$	۱۳